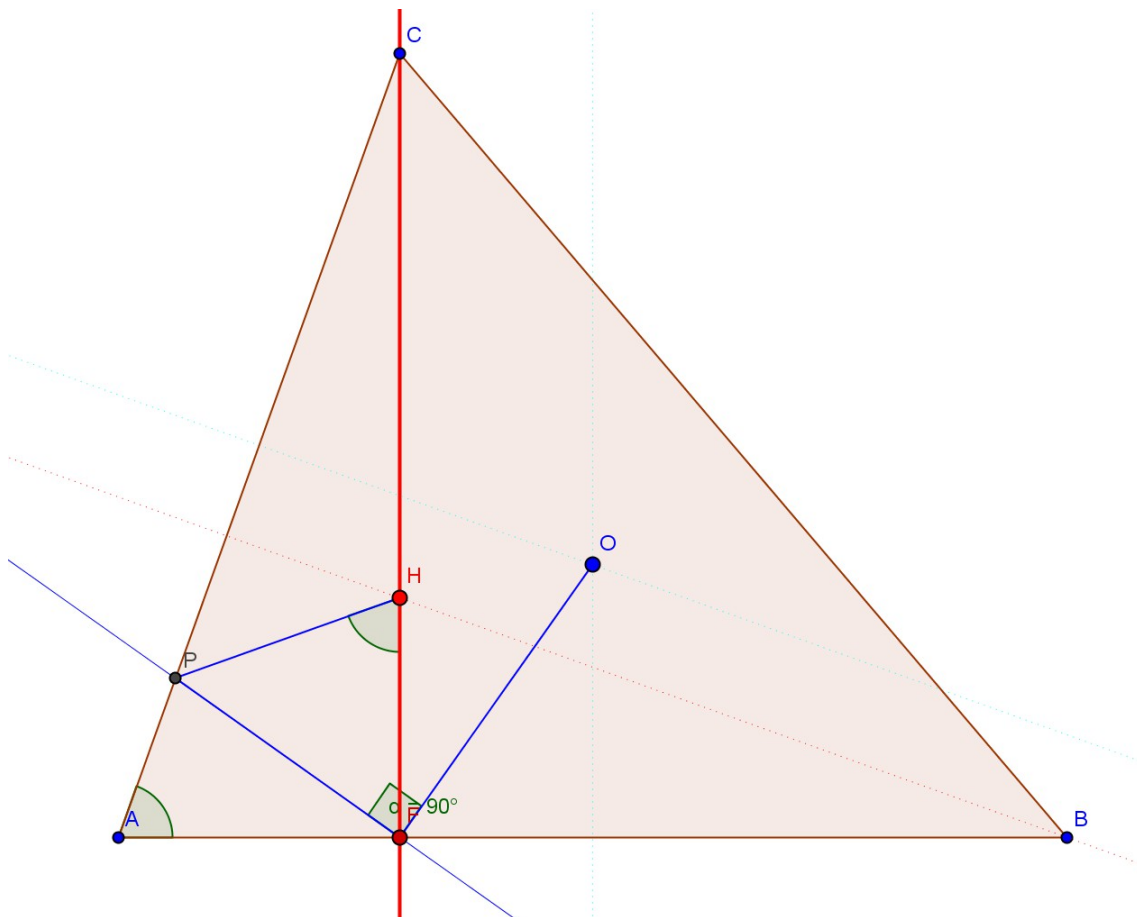


Problema propuesto por Adolfo Soler (Ingeniero de Telecomunicación)

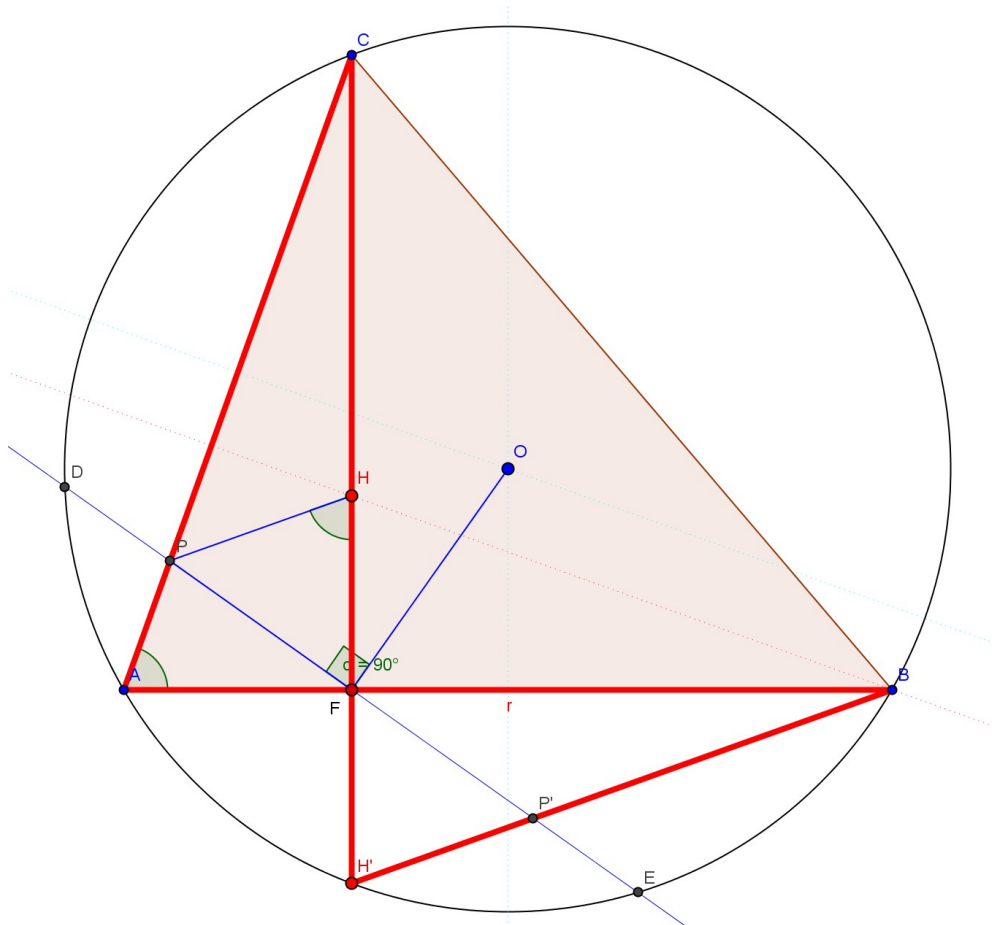
Sea ABC un triángulo acutángulo en el que el lado $AC < BC$, sean O y H el circuncentro y ortocentro del triángulo respectivamente, F el punto de corte de la altura CH con el lado AB , P el punto de corte del lado AC y la perpendicular a OF por F .

Probar que $\angle FAP = \angle PHF$

(New Problems in Euclidean Geometry by David Monk, UKMT)



Solución 1 : Por Teorema de la Mariposa



Sea H' el punto simétrico de H con respecto al lado AB , **este punto pertenece a la circunferencia que circunscribe al triángulo** (téngase en cuenta que F pertenece a la circunferencia de Feuerbach y la circunferencia de Feuerbach y la circunferencia que circunscribe al triángulo son homotéticas con respecto al ortocentro con razón 2).

Sea D y E los puntos de la recta PF que corta a la circunferencia que circunscribe al triángulo y sea P' el punto de corte de las recta PF y $H'B$.

Al ser OF perpendicular a $DE \Rightarrow F$ es el punto medio de $DE \Rightarrow$ Por el

teorema de la mariposa F será el punto medio de $PP' \Rightarrow \triangle PHF$ es

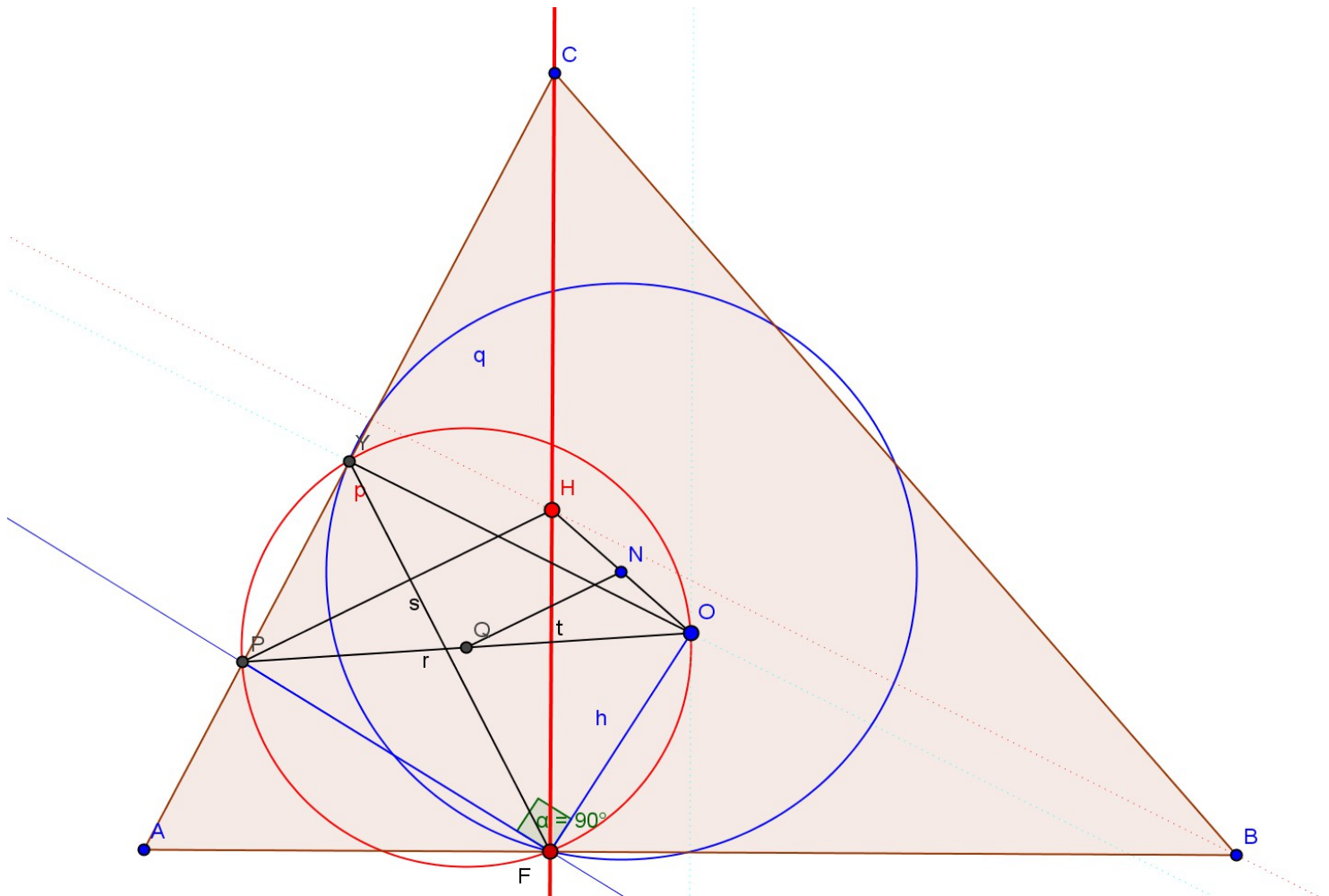
semejante al $\triangle P'H'F$ (ya que $PF=P'F$, $HF=H'F$ y $\angle HFP=\angle H'FP'$) $\Rightarrow \angle PHF =$

$\angle P'H'F$ y como H' y A pertenecen al arco capaz del segmento $BC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle FAP = \angle P'H'F = \angle PHF$$

Como quería demostrar.

Solución 2 (Por Teorema de la Circunferencia de Feuerbach y otros resultados).



Sea Y el punto medio del lado AC , resulta trivial comprobar $\angle HFY = 90^\circ - \angle A$. (FY una vértice de ángulo recto con punto medio de hipotenusa).

Por otra parte, el **cuadrilátero OYPF es cíclico** ya que $\angle F = \angle Y = 90^\circ$ y por tanto $\angle P + \angle O = 180^\circ$. **El centro** de esta circunferencia, que denominaremos **Q**, es el punto medio de PO.

Por otra parte, los **puntos Y, F pertenecen a la circunferencia de Feuerbach** y su centro, denominado **N**, es el punto medio de O y H.

Como YF es cuerda común de la circunferencia del cuadrilátero cíclico OYPF y de la circunferencia de Feuerbach del triángulo ABC, resulta que **FY es perpendicular a NQ**, y por otra parte, considerando el triángulo PHO, como N es punto medio de HO y Q punto medio de OP, resulta que

HP es paralelo a NQ, lo que implica que FY es perpendicular a HP, por lo que $\angle YFA = \angle PHF = \angle FAP$.

Como se quería demostrar.

NOTA:

Si $AC > BC$, la perpendicular a OF por F, no cortaría al lado AC.

(Cuando $AC = BC \Rightarrow P$ coincide con A)