

Solución al Problema 718
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 1 al 15 de septiembre de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

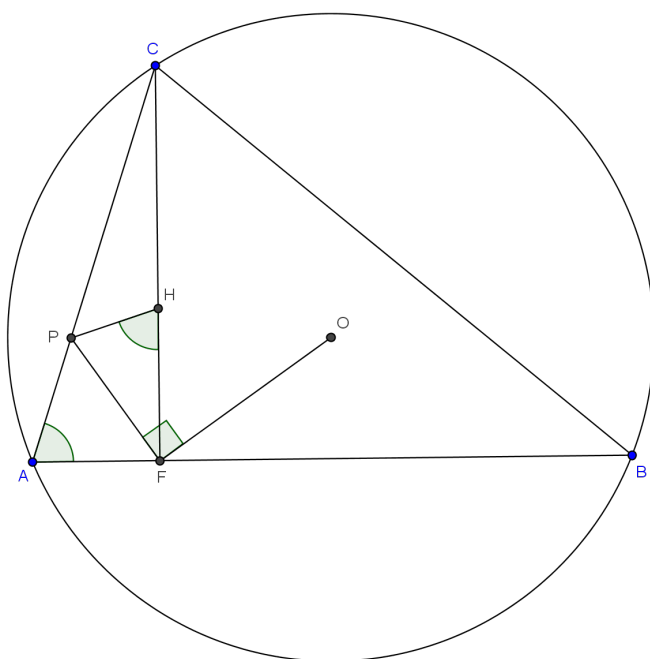
Septiembre 05, 2014

Problema 718. *Propuesto por Adolfo Soler (Ingeniero de Telecomunicación).*

Sea ABC un triángulo acutángulo en el que el lado $AC < BC$, sean O y H el circuncentro y ortocentro del triángulo respectivamente, F el punto de corte de la altura CH con el lado AB , P el punto de corte del lado AC y la perpendicular a OF por F . Probar que $\angle FAP = \angle PHF$.

Monk, D. (2009): New Problems in Euclidean Geometry, UKMT.

Solución 718. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas tenemos que $F(S_B : S_A : 0)$ y $O(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$. Por tanto la recta OF tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} S_B & S_A & 0 \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad OF \equiv c^2S_AS_Cx - c^2S_BS_Cy + (b^2S_B^2 - a^2S_A^2)z = 0$$

Y el punto del infinito de la recta perpendicular a la recta OF es $FP_\infty(X : Y : Z)$

Donde

$$\begin{aligned} X &= S_B(b^2S_B^2 - a^2S_A^2 - c^2S_AS_C) - S_C(c^2S_AS_C + c^2S_BS_C) \\ Y &= S_C(c^2S_AS_C + c^2S_BS_C) - S_A(-c^2S_BS_C - b^2S_B^2 + a^2S_A^2) \\ Z &= S_A(-c^2S_BS_C - b^2S_B^2 + a^2S_A^2) - S_B(b^2S_B^2 - a^2S_A^2 - c^2S_AS_C) \end{aligned}$$

Por tanto, la recta perpendicular a OF de F tendrá ecuación

$$\begin{vmatrix} S_B & S_A & 0 \\ X & Y & Z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad PF \equiv S_A Zx - S_B Zy + (S_B Y - S_A X)z = 0$$

El punto P es la intersección entre las rectas PF y el lado AC , por tanto

$$P(S_A X - S_B Y : 0 : S_A Z)$$

Por tanto la recta PH tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} S_A X - S_B Y & 0 & S_A Z \\ S_B S_C & S_C S_A & S_A S_B \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad PH \equiv p_1 x + q_1 y + r_1 z = 0$$

Donde

$$p_1 = -S_A^2 S_C Z$$

$$q_1 = S_A S_B (-S_A X + S_B Y + S_C Z)$$

$$r_1 = S_A S_C (S_A X - S_B Y)$$

La recta CF tiene ecuación $CF \equiv S_A x - S_B y = 0$ donde $p_2 = S_A$, $q_2 = -S_B$ y $r_2 = 0$

Ahora la fórmula que expresa el ángulo entre dos líneas es

$$S_\theta = S \cot \theta = \frac{S_A(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + S_B(r_1 - p_1)(r_2 - p_2) + S_C(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}{}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

Por tanto el ángulo PHF viene dado por

$$S_{PHF} = S \cot \widehat{PHF} = \frac{-S_A S_B (q_1 - r_1) - S_A S_B (r_1 - p_1) + (S_A S_C + S_B S_C)(p_1 - q_1)}{}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ S_A & -S_B & 0 \end{vmatrix}$$

Ahora. haciendo operaciones, desarrollando y simplificando, se obtiene

$$S_{PHF} = \frac{1 \text{ Num}}{2 \text{ Den}}$$

Donde

$$\begin{aligned} \text{Num} = & -6b^2c^{16} + 2b^4c^{14} + 10b^6c^{12} - 2b^{10}c^8 + 6b^{12}c^6 - 2b^{14}c^4 + 20a^2b^2c^{14} + 6a^2b^4c^{12} - 8a^2b^6c^{10} - \\ & 12a^2b^{10}c^6 + 10a^2b^{12}c^4 - 10a^4b^2c^{12} - 12a^4b^4c^{10} - 4a^4b^6c^8 - 18a^4b^{10}c^4 - 40a^6b^2c^{10} - 20a^6b^4c^8 - 8a^6b^6c^6 + \\ & 70a^8b^2c^8 + 42a^8b^4c^6 + 10a^8b^6c^4 - 44a^{10}b^2c^6 - 18a^{10}b^4c^4 + 10a^{12}b^2c^4 + 2c^{18} - 10b^8c^{10} - 14a^2c^{16} - 2a^2b^8c^8 + \\ & 42a^4c^{14} + 2a^4b^8c^6 - 70a^6c^{12} + 70a^8c^{10} - 42a^{10}c^8 + 14a^{12}c^6 + 10a^6b^8c^4 - 2a^{14}c^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Den} = & +2c^{16} - 8b^2c^{14} + 10b^4c^{12} - 10b^8c^8 + 8b^{10}c^6 - 2b^{12}c^4 - 12a^2c^{14} + 24a^2b^2c^{12} - 8a^2b^4c^{10} - 12a^2b^8c^6 + \\ & 8a^2b^{10}c^4 + 30a^4c^{12} - 16a^4b^2c^{10} - 4a^4b^4c^8 - 10a^4b^8c^4 - 40a^6c^{10} - 16a^6b^2c^8 - 8a^6b^4c^6 + 30a^8c^8 + 24a^8b^2c^6 + \\ & 10a^8b^4c^4 - 12a^{10}c^6 - 8a^{10}b^2c^4 + 2a^{12}c^4 + 2c^{18} - 10b^8c^{10} - 14a^2c^{16} - 2a^2b^8c^8 + 42a^4c^{14} + 2a^4b^8c^6 - 70a^6c^{12} + \\ & 70a^8c^{10} - 42a^{10}c^8 + 14a^{12}c^6 + 10a^6b^8c^4 - 2a^{14}c^4 \end{aligned}$$

desarrollando y simplificando se puede notar que $\text{Num} = 2S_A \text{Den}$

$$S_{PHF} = S_A \quad \Rightarrow \quad \angle PHF \cong \angle FAP \quad q.e.d.$$