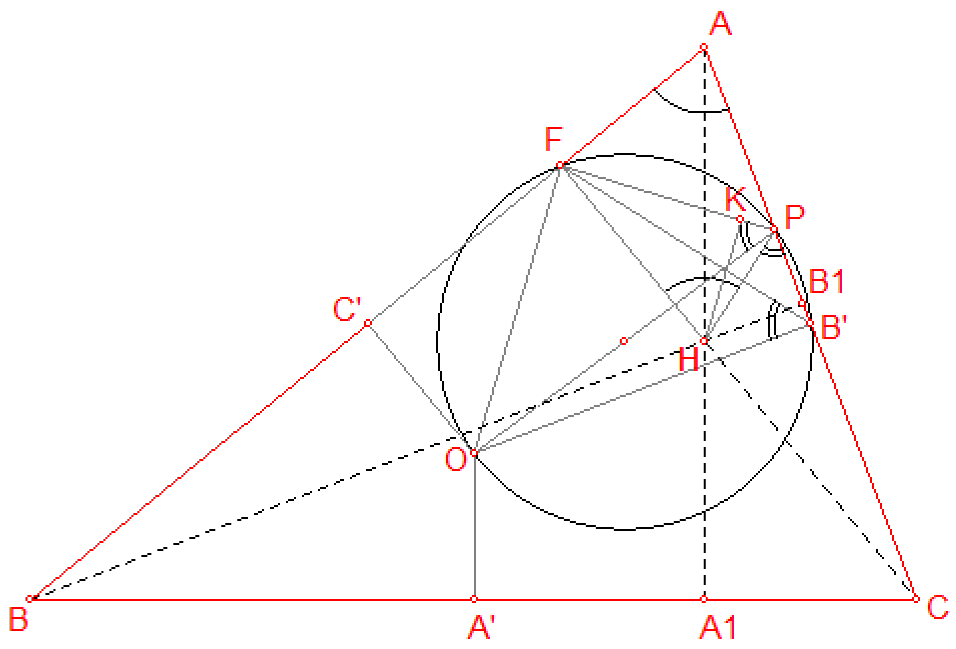
Problema 718.-
Propuesto por Adolfo Soler (Ingeniero de Telecomunicación)

Sea ABC un triángulo acutángulo en el que el lado AC<BC, sean O y H el circuncentro y ortocentro del triángulo, respectivamente, F el punto de corte de la altura CH con el lado AB, P el punto de corte del lado AC y la perpendicular a OF por F.
Probar que <FAP = <PHF.

Monk, D. (2009): New Problems in Euclidean Geometry, UKMT

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Notación a usar en el triángulo ABC.
Llamamos A', B' y C' a los puntos medios de los lados BC, CA y AB, respectivamente.
Sean además A_1 y B_1 los pies de las alturas trazadas desde los vértices A y B, respectivamente.
Sea K el pie de la perpendicular trazada desde el punto H hasta el segmento FP.

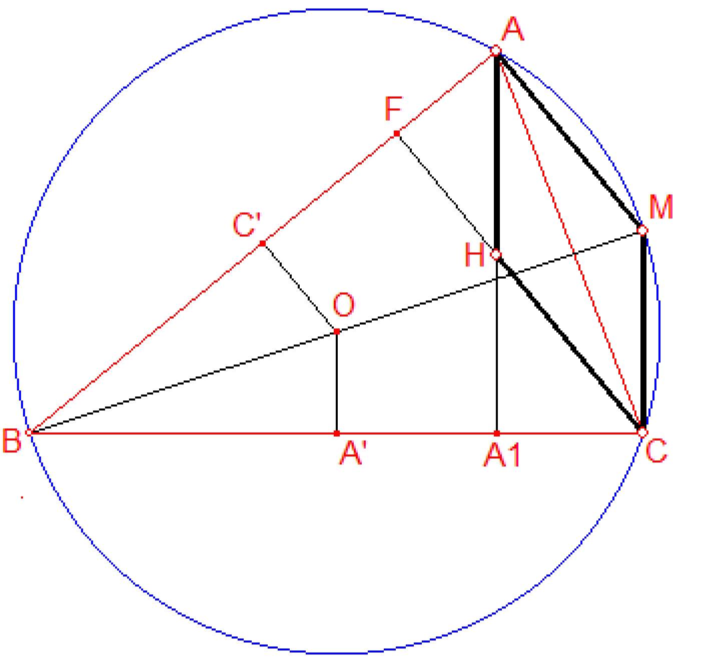


Observamos la igualdad de ángulos $\measuredangle FB'O = \measuredangle OPF$, por estar ambos ángulos inscritos en la misma circunferencia abarcando la misma cuerda OF, al tratarse OB'PF de un cuadrilátero concíclico. ($\measuredangle OFP = \measuredangle OB'P = 90º$)
Como se tiene que $\measuredangle FB'A = 180º - 2A$, entonces $\measuredangle FB'O = \measuredangle OPF = 2A - 90º$.
Ambos ángulos los señalamos en la figura con el mismo símbolo .
Nuestro objetivo será demostrar que el ángulo $\measuredangle HPC$ deberá ser marcado con el mismo símbolo =2A-90º.
Cuando este hecho sea probado, tendremos entonces que, en efecto:

$$\boldsymbol{\measuredangle PHF = \measuredangle ACH + \measuredangle HPC = (90º - A) + (2A - 90º) = \measuredangle A.}$$

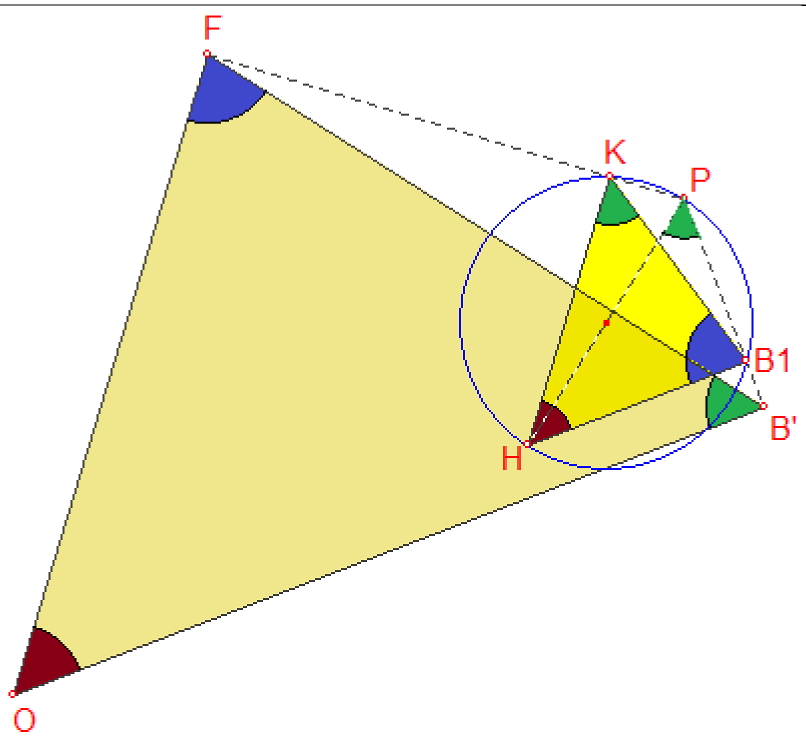
Hasta llegar a este resultado, iremos obteniendo una serie de resultados previos.
Por la igualdad de ángulos $\measuredangle OFC' = \measuredangle HFP$ si ahora trazamos la perpendicular a FP por el punto H, obtenemos una semejanza entre los triángulos rectángulos OC'F y HKF.

De esta semejanza, obtenemos la relación: $\frac{OC'}{OF} = \frac{HK}{HF} \rightarrow HK.OF = HF.OC'$



Como podemos ver en la figura $OC' = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}HC$ y además $HF*HC=HA_1*HA=HB_1*HB$

Por tanto, $HK.OF = HF.OC' = \frac{1}{2}HF.HC = \frac{1}{2}HB_1.HB = HB_1.OB'$



En definitiva, $HK.OF = HB_1.OB' \rightarrow \frac{HK}{HB_1} = \frac{OB'}{OF}$ y como quiera que estos ángulos $\measuredangle B'OF \ y \ \measuredangle B_1HK$ son iguales, obtenemos la semejanza entre los triángulos $\Delta B'OF \ y \ \Delta KHB_1$.

En particular, nos interesa la igualdad de ángulos $\measuredangle HKB_1 = \measuredangle FB'O$.

Además en el cuadrilátero concíclico $HKPB_1$ se verifica la igualdad $\measuredangle HPB_1 = \measuredangle HKB_1$.

En definitiva, $\measuredangle HPC = \measuredangle HPB_1 = \measuredangle HKB_1 = \measuredangle FB'O$ = $2A - 90º$ ■ **c. q. d.**