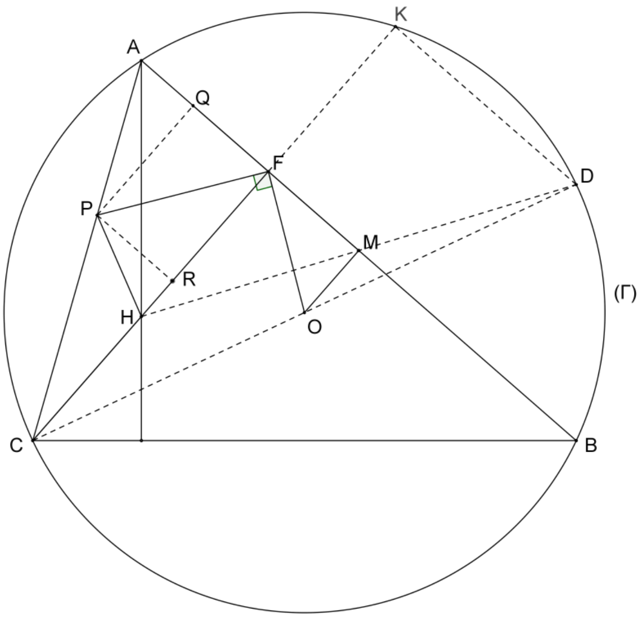
Problema 718
Propuesto por Adolfo Soler (Ingeniero de Telecomunicación)
Sea ABC un triángulo acutángulo en el que el lado AC<BC, sean O y H el circuncentro y ortocentro del triángulo respectivamente, F el punto de corte de la altura CH con el lado AB, P el punto de corte del lado AC y la perpendicular a OF por F.Probar que <FAP = <PHF.
Monk, D. (2009): New Problems in Euclidean Geometry, UKMT

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On désigne par Q et R les projections de P sur le côté AB et sur la hauteur CH, par M la projection de O sur AB, D le symétrique de C par rapport à O et K le symétrique de H par rapport à F.
On admet les propriétés bien connues selon lesquelles :

a) K est sur le cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC,
b) le triangle CKD est rectangle en K et les points A,D,B et H forment un parallélogramme,
c) les points H,M et D sont alignés avec M milieu de HD.

Il en résulte **CH = 2OM.** (1)

La démonstration de l'égalité des angles $\angle$FAP et $\angle$PHF revient à démontrer que les triangles rectangles CAF et PHR sont semblables. En effet si $\angle$CAF = $\angle$PHR, alors $\angle$FAP = $\angle$CAF = $\angle$PHR = $\angle$PHF.
Par construction, comme $\angle$OFM = $\angle$PFR, les triangles OFM et PFR sont semblables. Il en est de même des triangles OFM et FPQ.Comme MF = (BF – AF)/2, on en déduit d'après (1) :
r = MF/OM = (BF – AF)/CH = PQ/QF. D'où **r.CH = BF – AF** et **PQ = r.QF**. (2)
Par ailleurs,en exprimant la puissance de F par rapport au cercle (Γ),on a la relation :
AF.BF = CF.FK ,soit **AF.BF = CF.HF** (3) tandis que dans le triangle ACF, le théorème de Thalès permet d'écrire : PQ/AQ = CF/AF ,soit PQ/(AF – QF) = CF/AF.
D'où **QF = CF.AF(CF + r.AF)** et **PQ = r.CF.AF/(CF + r.AF)**. (4)

Dans le triangle PHR, le rapport des côtés PR/HR est égal à QF/HR = QF/(HF – PQ).
Or d'après (4) , on a HF – PQ = (HF.(CF + r.AF) – r.CF.AF)/(CF + r.AF)
soit encore, comme CH = CF – HF, HF – PQ = (HF.CF – r.CH.AF)/(CF+r.AF).
Compte tenu des relations (2) et (3), on a HF – PQ = AF^2/(CF + r.AF).
D'où PR/HR = QF/HR = CF.AF/AF^2 = CF/AF c.q.f.d