Solución al Problema 719
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 1 al 15 de septiembre de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Septiembre 09, 2014

Problema 719. *Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.*
234. Teorema. Demostrar que el transformado isogonal de un punto del circuncírculo están en la recta del infinito, e inversamente.
Johnson R.A.(1929) Advanced Euclidean Geometry. (pag. 154). Dover publications, INC. New York.

Solución 719. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*

Las rectas simétricas de las cevianas de un punto $P(u:v:w)$, respecto a las bisectrices, se cortan en un punto P^*, denominado "conjugado isogonal" de P; y es claro que inversamente P es el conjugado isogonal de P^*.
Calculamos las coordenadas del conjugado isogonal de $P(u:v:w)$.
Ahora la fórmula que expresa el ángulo entre dos líneas es

$$S_\theta = S\cot\theta = \frac{S_A(q_1-r_1)(q_2-r_2)+S_B(r_1-p_1)(r_2-p_2)+S_C(p_1-q_1)(p_2-q_2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}}$$

El lado $AB \equiv z = 0$ forma con la ceviana $AP \equiv wy - vz = 0$ el ángulo orientado θ, por tanto

$$S_\theta = \frac{v+w}{w}S_A + \frac{v}{w}S_B$$

El ángulo que forma el lado AC con la conjugada isogonal de AP es $\pi - \theta$.
Ahora la conjugada isogonal de AP tiene el punto del infinito, $(S_{\pi-\theta} - S_C : b^2 : -(S_{\pi-\theta} + S_A)) = (-c^2v - b^2w : b^2w : c^2v)$.
Por tanto la conjugada isogonal de AP tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c^2v-b^2w & b^2w & c^2v \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -c^2vy + b^2wz = 0$$

Similarmente se puede calcular las ecuaciones de las conjugadas isogonales de las cevianas BP y CP que son

$$c^2ux - a^2wz = 0, \qquad -b^2ux + a^2vy = 0$$

este se cortan en

$$P^*(a^2vw : b^2wu : c^2uv)$$

Ahora el lugar geométrico de los puntos conjugados isogonales de la recta $px + qy + rz = 0$ es

$$pa^2yz + qb^2zx + rc^2xy = 0$$

el primer miembro se anula para las coordenadas de los vértices A, B y C: es una cónica circunscrita al $\triangle ABC$.
Pues, el lugar geométrico de los puntos conjugados isogonales de la recta del infinito $x + y + z = 0$ es

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

que es la ecuación del circuncírculo del $\triangle ABC$ e inversamente.