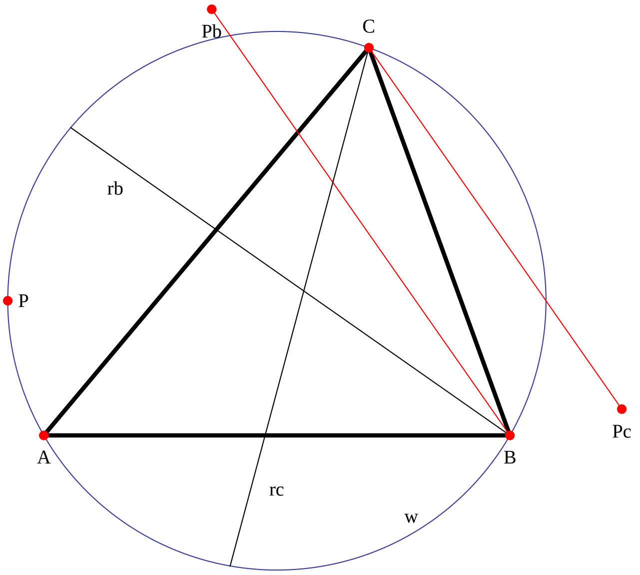
Pr. Cabri 719
por César Beade Franco

Enunciado

Demostrar que el transformado isogonal de un punto del circuncírculo están en la recta del infinito, e inversamente.

Solución



En el dibujo Pb y Pc son los simétricos de P respecto a las bisectrices rb y rc. El transformado isogonal de P será el punto intersección de PbB y PcC.
Demostraremos que esas rectas son paralelas y para ello basta comprobar que los ángulos PbBC y PcCB son iguales.
PcCB = ACP pues PC y PcC son simétricos respecto a la bisectriz rc. De manera análoga deducimos que PbBC = ABP.
Además ACP = ABP al abarcar el mismo arco.
Por tanto PcCB = ACP = ABP = PbBC, lo que implica, según dijimos, el paralelismo de CPc y BPb.

El resultado anterior nos permite establecer el tipo de cónica obtenida al transformar cualquier recta. Dependerá del número de intersecciones con ω pues de eso dependerá de puntos en el ∞ de la cónica.
Si no la corta se transforma en una elipse. Si la corta en dos puntos, en una hipérbola y si es tangente en una parábola.
Y aun podemos precisar más. Si la recta es un diámetro de ω se transforma en una hipérbola equilátera (el transformado de O es H). Así pues todas las hipérbolas equiláteras por ABC (vértices) se generan (isogonalmente) por diámetros de la ω.