Problema 719.-
Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

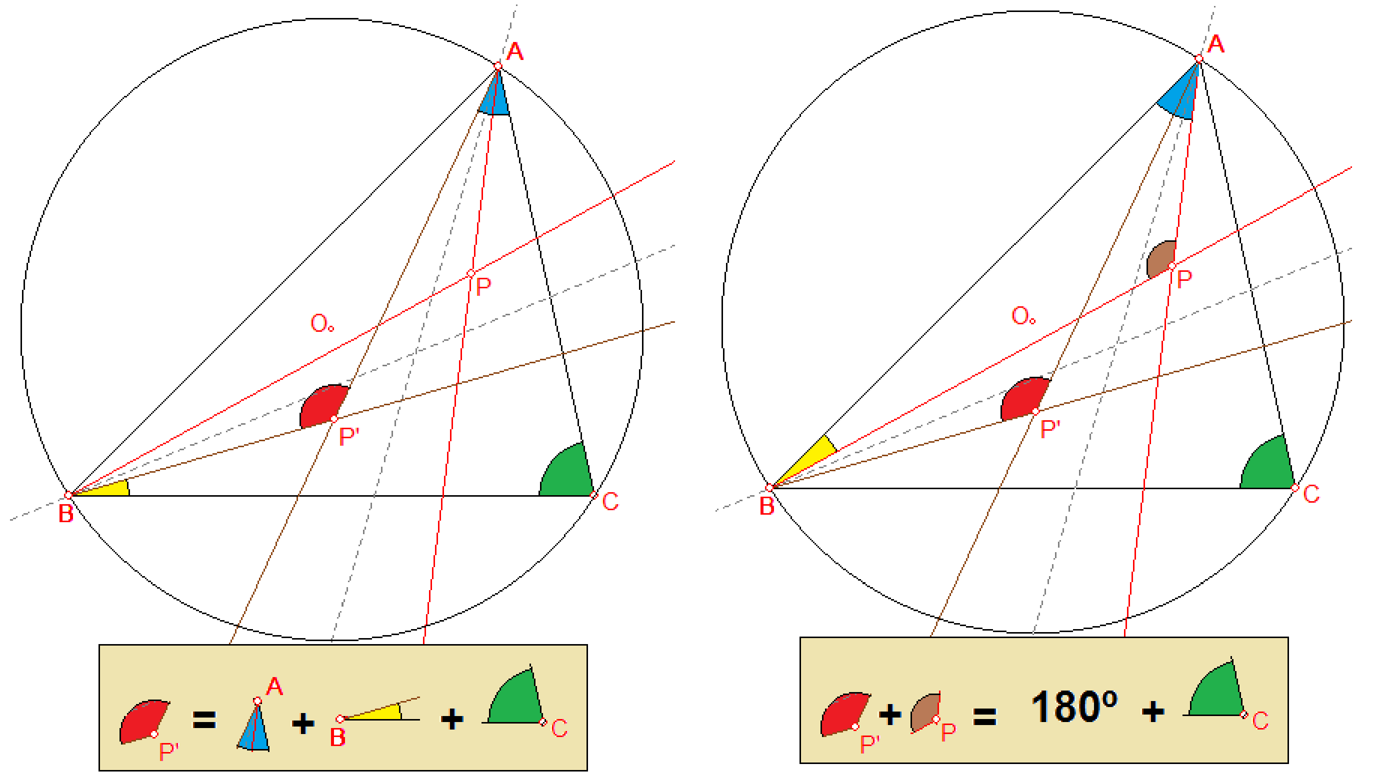
Demostrar que el transformado isogonal de un punto del circuncírculo están en la recta del infinito, e inversamente.

Johnson R.A. (1929) Advanced Euclidean Geometry. (pag. 154). Dover publications, INC. New York.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

<u>Primera Parte</u>: Justificación del Teorema. Sea un punto P distinto de A, B y C.

Se observan las siguientes relaciones entre los ángulos señalados en estas figuras en particular:



En general y, dependiendo de la posición del punto P respecto del triángulo ABC, tendremos que $\measuredangle(\overline{P'A},\overline{P'B}) + \measuredangle(\overline{PA},\overline{PB}) \equiv \measuredangle(\overline{CA},\overline{CB}) mod(180º)$.

Por tanto, si las rectas isogonales transformadas respecto del punto P son paralelas, entonces tenemos que $\measuredangle(\overline{P'A},\overline{P'B}) \equiv 0º mod(180º) \rightarrow \measuredangle(\overline{PA},\overline{PB}) \equiv \measuredangle(\overline{CA},\overline{CB}) mod(180º)$, lo que se traduce en que el cuadrilátero PABC es concíclico.

En definitiva, podemos afirmar que:
Las rectas isogonales transformadas respecto de un punto P son paralelas si y sólo si el punto P está en el circuncírculo ABC.

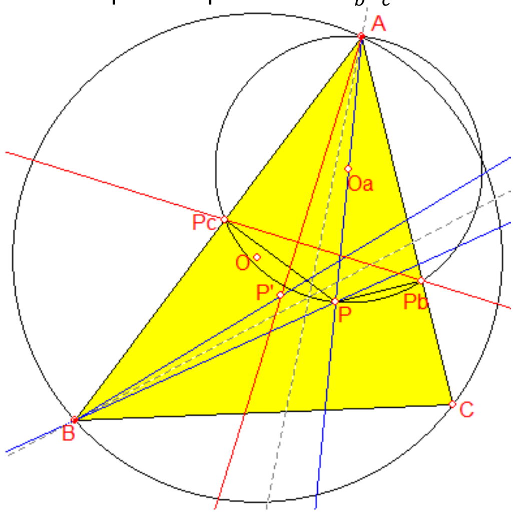
Segunda Parte: La dirección de la recta del infinito es perpendicular a la recta de Simson por el punto P.

Lema previo.-

Dado un punto P cualquiera, llamamos P_b y P_c a los puntos que son los pies de las perpendiculares trazadas desde el punto P a los lados AC y AB del triángulo ABC, respectivamente.

Sea P' el punto transformado isogonal de P.

Vamos a probar que $AP' \perp P_bP_c$



En efecto, tenemos que el cuadrilátero AP_bPP_c es concíclico con diámetro AP.

Por tanto $\measuredangle \boldsymbol{AP_bP_c} = \measuredangle \boldsymbol{APP_c} = \mathbf{90º} - \measuredangle \boldsymbol{PAP_c} = \mathbf{90º} - \measuredangle \boldsymbol{P'AP_b}$;

$\measuredangle \boldsymbol{AP_bP_c} + \measuredangle \boldsymbol{P'AP_b} = \mathbf{90º} \rightarrow \boldsymbol{AP'} \perp \boldsymbol{P_bP_c}$

Sabemos por el *Teorema de Simson*, que dado un triángulo ABC y un punto P cualquiera, la condición para que los puntos P_a, P_b y P_c, pies de las perpendiculares trazadas desde P a los lados del triángulo ABC estén alineados (Recta de Simson) es que P pertenezca a la circunferencia circunscrita.

Es decir, P pertenecerá a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC si y sólo si P_a, P_b y P_c están alineados.

Esto equivale a decir que $AP' \perp P_bP_c$; $BP' \perp P_cP_a$; $CP' \perp P_aP_b$.

Y esta condición es equivalente a afirmar que $AP' \parallel BP' \parallel CP' \rightarrow P'\, es\ un\ punto\ de\ la\ recta\ del\ infinito.$