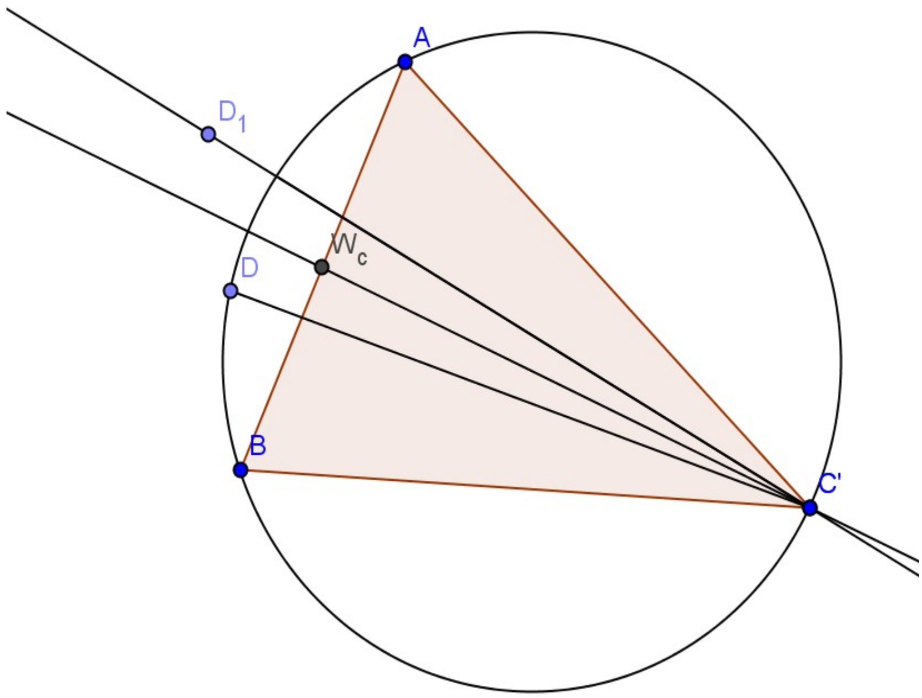
Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

Problema 719

234. Teorema. Demostrar que el transformado isogonal de un punto del circuncírculo están en la recta del infinito, e inversamente.

Johnson R.A.(1929) Advanced Euclidean Geometry. (pag. 154). Dover publications, INC. New York.

Solución del Director



Sea D un punto del circuncírculo de ABC de ángulos α,β,γ .
Tracemos CD, y la bisectriz interna CW_c por C, así como CD_1 simétrica de CD en relación a la bisectriz, que es la isogonal de CD.

Sea $<DCB=\omega$. Es $<BCW_c=\gamma/2$.$<DCW_c=\gamma/2-\omega$, $<ACD_1=\omega$.

Consideremos ahora la isogonal AD_2 de AD.

$<DAB=\omega$. Si consideramos ahora la bisectriz del ángulo en A, Es $<BAW_a=\alpha/2$.

$<DAW_a=\omega+\alpha/2$, $<CAD_2=\omega$. Es decir, las rectas CD_1 y AD_2. Son paralelas.

Observemos la isogonal BD_3 de BD.

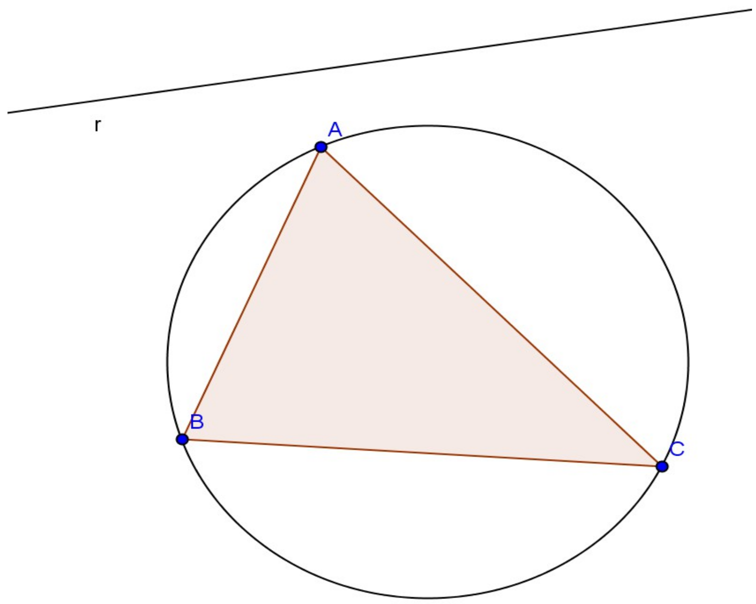
Es $<ABD=\lambda-\omega$.
Por analogía con los cálculos precedentes, $<CBD_3=\lambda-\omega=D_1CB$.

Luego cqd, el punto isogonal de D está en la recta del infinito.

En el caso de ser un vértice, la isogonal degenera en el vértice y el punto del infinito del lado opuesto.
En el caso de ser D el corte de una bisectriz del triángulo con la circunscrita, el punto del infinito es el de dicha bisectriz.
Si D es el corte de la altura con la circunscrita, el punto del infinito es el del diámetro que contiene al vértice dado.

Si D es el corte del diámetro que contiene al vértice dado, el punto del infinito es el de la altura de ese vértice.

Veamos la propiedad inversa.
Sea un punto del infinito dado por la dirección de una recta r.



Trazamos paralelas a r por A, B y C.
Sean X, Z y T los puntos de corte de las mismas con la circunscrita.
Supongamos que <ZBC=η. Será <BCT=η, y XAC=γ + η.
Tomando la isogonal BR con R sobre la circunscrita , a BZ, cortará a la circunscrita en R, tal que <ABR=η.
Tomando la isogonal CM con M sobre la circunscrita , a CT, será un punto de la circunscrita tal que <ACM=η
Así ha de ser R=M.
Tomado también la isogonal AN con N sobre la circunscrita, a AX, habrá de ser :
<XAC=γ+η, y si W está en la prolongación de la paralela a r por A, será <WAB=β-η.
Así la isogonal de AX es tal que cortará a la circunscrita en U con <UAC= β-η.
Luego U=M, cqd.
Ricardo Barroso Campos
Jubilado
Sevilla