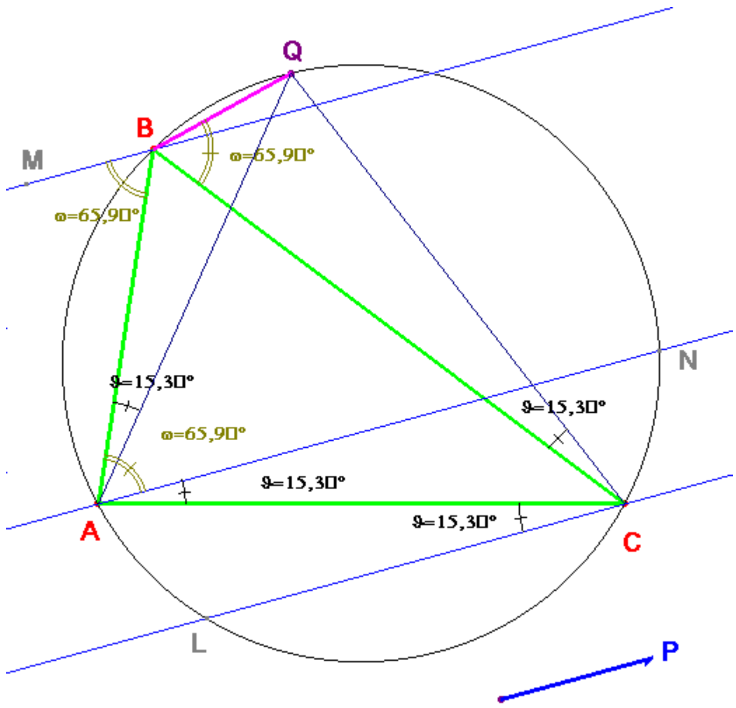
Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña

***Problema* 719**.- *Demostrar que el transformado isogonal de un punto del circuncírculo está en la recta del infinito, e inversamente.*

Johnson R.A.(1929) Advanced Euclidean Geometry. (pag. 154). Dover publications, INC. New York.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea P es el punto del infinito de las rectas paralelas AN, BM y CL.

Tomamos AQ la recta isogonal de AN respecto del ángulo $\sphericalangle BAC$; por tanto los ángulos $\theta = \sphericalangle BAQ = \sphericalangle NAC$ y éste último igual a $\sphericalangle LCA$ por ser paralelas CL y AN.

Por otro lado $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAQ$ por inscritos que abarcan el mismo arco. En resumen: $\sphericalangle ACL = \sphericalangle BCQ$, por tanto las rectas CQ y CL son isogonales respecto del ángulo $\sphericalangle ACB$.

Veamos ahora con B. El ángulo $\omega = \sphericalangle MBA = \sphericalangle BAN$ por alternos internos y éste a su vez es igual a $\sphericalangle QAC$ que abarca el arco QNC, por tanto igual al ángulo $\sphericalangle QBC$ que también abarca el mismo arco. Por tanto BQ y BM son isogonales respecto de $\sphericalangle CBA$.

Para finalizar: las rectas conjugadas isogonales de AP, BP, CP (donde P está en el infinito) pasan todas por el punto Q de la circunferencia circunscrita al triángulo.

El conjugado isogonal de un punto del infinito está en la circunferencia circunscrita.

Recíprocamente, si Q es un punto de la circunferencia circunscrita trazamos AN la recta isogonal de AQ con respecto al ángulo $\sphericalangle BAC$.

Q, según el proceso de la primera parte, es el conjugado isogonal del punto del infinito P, de la recta AN.

Otro modo de resolver este problema consiste en tomar coordenadas baricéntricas referidas al triángulo ABC. El conjugado isogonal del punto $P(x{:}\,y{:}\,z)$ del plano es el punto $Q\left(\frac{a^2}{x}:\frac{b^2}{y}:\frac{c^2}{z}\right)$.

La recta del infinito tiene ecuación $x+y+z=0$ y la circunferencia circunscrita $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$. Es inmediato ver cómo la transformación isogonal cambia un objeto en el otro. ■