

Solución al Problema 720
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 16 al 30 de septiembre de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Septiembre 19, 2014

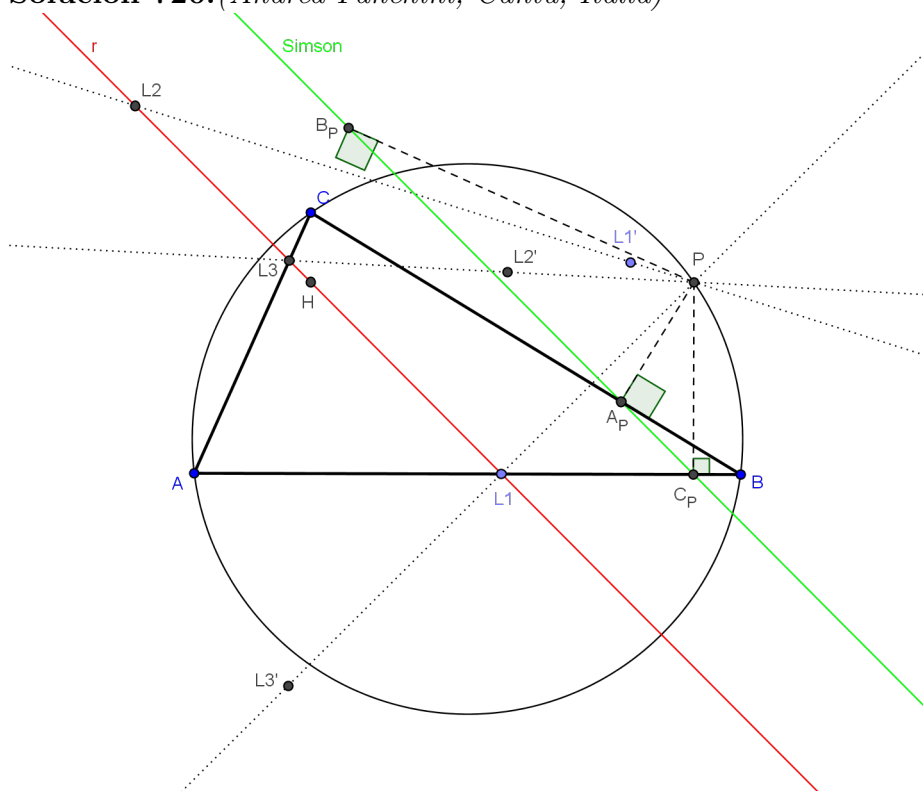
Problema 720.

333. Teorema

Si una recta r contiene al ortocentro H corta a los lados del triángulo ABC en L_1 , L_2 y L_3 , las simétricas de r respecto a AB , AC y BC concurren en un punto P del circuncírculo y la recta de Simson de P es paralela a r , e inversamente.

Johnson R.A.(1929) Advanced Euclidean Geometry. (pag. 210). Dover publications, INC. New York.

Solución 720. (Andrea Fanchini, Cantú, Italia)



Usando coordenadas baricéntricas tenemos que la recta r que contiene al ortocentro $H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$ y con punto del infinito $(f : g : h)$ (cio tale che $f + g + h = 0$) tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ S_B S_C & S_C S_A & S_A S_B \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r \equiv (g S_A S_B - h S_A S_C)x - (f S_A S_B - h S_B S_C)y + (f S_A S_C - g S_B S_C)z = 0$$

Ahora ponemos $p = g S_A S_B - h S_A S_C$, $q = h S_B S_C - f S_A S_B$ y $r = f S_A S_C - g S_B S_C$, por tanto la recta r tiene ecuación $r \equiv px + qy + rz = 0$.

Tenemos que

$$L_1 \equiv r \cap \underbrace{AB}_{z=0}(q : -p : 0) \quad L_2 \equiv r \cap \underbrace{BC}_{x=0}(0 : r : -q) \quad L_3 \equiv r \cap \underbrace{CA}_{y=0}(-r : 0 : p)$$

El punto del infinito de la recta perpendicular al lado BC es $BC_{\infty\perp}(-a^2 : S_C : S_B)$, por tanto la recta $L_1L'_1$ tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} q & -p & 0 \\ -a^2 & S_C & S_B \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L_1L'_1 \equiv -pS_Bx - qS_By + (qS_C - pa^2)z = 0$$

la recta $L_1L'_1$ corta el lado BC nel punto $M_1(0 : qS_C - pa^2 : qS_B)$ y por tanto el punto L'_1 simétrico de L_1 respecto a M_1 tiene coordenadas $L'_1(-a^2q : 2qS_C - pa^2 : 2qS_B)$.

Entonces la recta simétricas de r respecto a BC tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & r & -q \\ -a^2q & 2qS_C - pa^2 & 2qS_B \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L_2L'_1 \equiv (2rS_B + 2qS_C - pa^2)x + a^2qy + a^2rz = 0$$

El punto del infinito de la recta perpendicular al lado CA es $CA_{\infty\perp}(S_C : -b^2 : S_A)$, por tanto la recta $L_2L'_2$ tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & r & -q \\ S_C & -b^2 & S_A \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L_2L'_2 \equiv (rS_A - qb^2)x - qS_Cy - rS_Cz = 0$$

la recta $L_2L'_2$ corta el lado CA nel punto $M_2(rS_C : 0 : rS_A - qb^2)$ y por tanto el punto L'_2 simétrico de L_2 respecto a M_2 tiene coordenadas $L'_2(2rS_C : -b^2r : 2rS_A - qb^2)$.

Entonces la recta simétricas de r respecto a CA tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & p \\ 2rS_C & -b^2r & 2rS_A - qb^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L_3L'_2 \equiv b^2px + (2pS_C + 2rS_A - qb^2)y + b^2rz = 0$$

El punto del infinito de la recta perpendicular al lado AB es $AB_{\infty\perp}(S_B : S_A : -c^2)$, por tanto la recta $L_3L'_3$ tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} -r & 0 & p \\ S_B & S_A & -c^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L_3L'_3 \equiv pS_Ax + (rc^2 - pS_B)y - rS_Az = 0$$

la recta $L_3L'_3$ corta el lado AB nel punto $M_3(-rc^2 + pS_B : pS_A : 0)$ y por tanto el punto L'_3 simétrico de L_3 respecto a M_3 tiene coordenadas $L'_3(2pS_B - rc^2 : 2pS_A : -c^2p)$.

Entonces la recta simétricas de r respecto a AB tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} q & -p & 0 \\ 2pS_B - rc^2 & 2pS_A & -c^2p \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow L_1L'_3 \equiv c^2px + c^2qy + (2qS_A + 2pS_B - rc^2)z = 0$$

Las tres rectas $L_2L'_1$, $L_3L'_2$ y $L_1L'_3$ son concurrentes en cuánto

$$\begin{vmatrix} 2rS_B + 2qS_C - pa^2 & a^2q & a^2r \\ b^2p & 2pS_C + 2rS_A - qb^2 & b^2r \\ c^2p & c^2q & 2qS_A + 2pS_B - rc^2 \end{vmatrix} = 0$$

y se cortan en el punto $P(a^2b^2qr - a^2prS_C - a^2r^2S_A : a^2b^2pr - b^2qrS_C - b^2r^2S_B : ***)$ y haciendo operaciones, desarrollando y simplificando se puede averiguar que P pertenece al circuncírculo $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$.

Ahora el punto del infinito de la recta de Simson de un punto $P(u : v : w)$ es

$$s(P)_\infty(-a^2(S_Cv + b^2u) : b^2(S_Cu + a^2v) : b^2S_Bu - a^2S_Av).$$

en nuestro caso tenemos que $u = a^2b^2qr - a^2prS_C - a^2r^2S_A$ y $v = a^2b^2pr - b^2qrS_C - b^2r^2S_B$, por tanto se consigue que $s(P)_\infty(q - r : r - p : p - q)$.

Recordando que pusimos $p = gS_AS_B - hS_AS_C$, $q = hS_BS_C - fS_AS_B$ y $r = fS_AS_C - gS_BS_C$, se tiene que $s(P)_\infty(f : g : h)$ y siendo lo mismo punto del infinito de la recta r se puede concluir que la recta de Simson de P es paralela a r y inversamente (q.e.d.).