Problema 720.-

Teorema

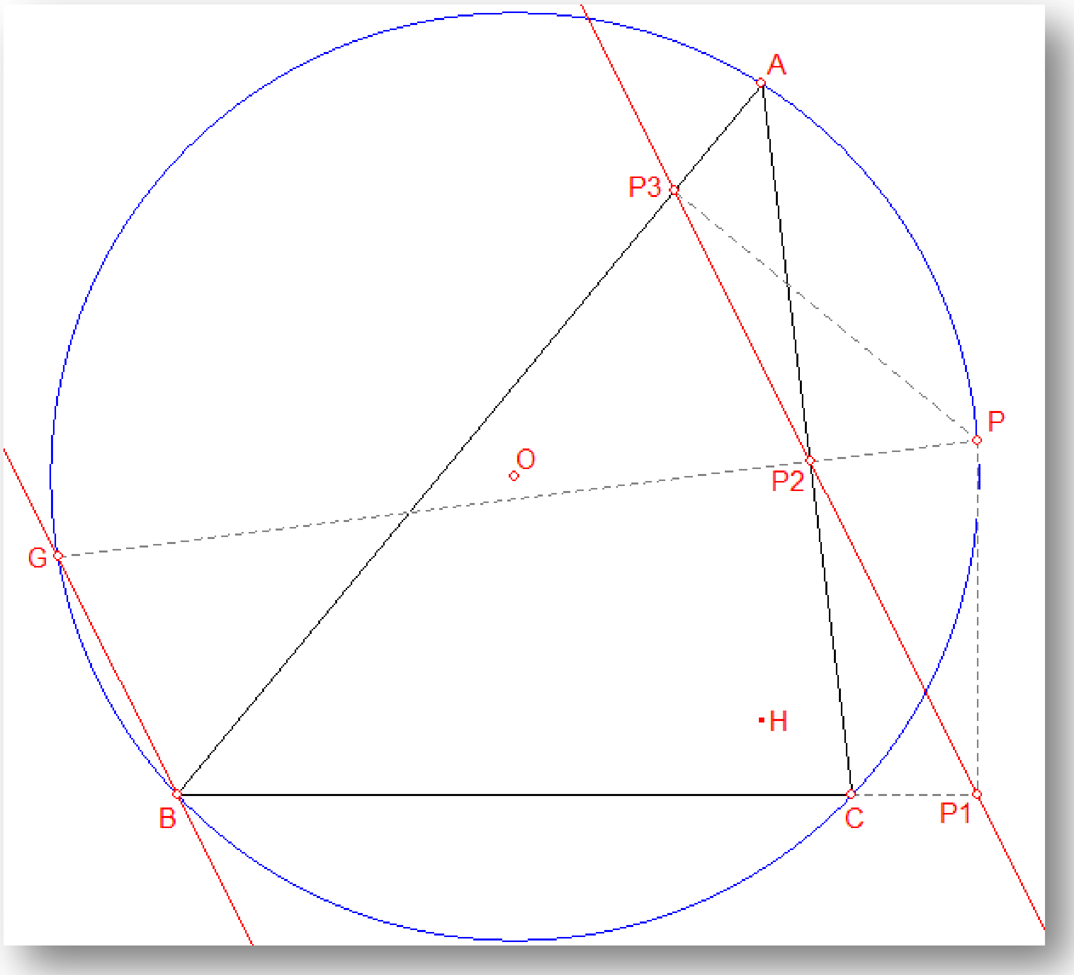
Si una recta r contiene al ortocentro H corta a los lados del triángulo ABC en L1, L2 y L3, las simétricas de r respecto a AB, AC y BC concurren en un punto P del circuncírculo y la recta de Simson de P es paralela a r, e inversamente.

Johnson R.A. (1929) Advanced Euclidean Geometry. (pag. 154). Dover publications, INC. New York.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

<u>Primera Parte</u>: Justificación del Teorema directo. Sea un punto P del circuncírculo distinto de A, B y C.

Hecho 1: Teorema de Simson.
Trazando desde el punto P las proyecciones ortogonales sobre los lados del triángulo ABC, obtenemos los puntos P_1, P_2 y P_3 que están alineados (*Recta de Simson*).

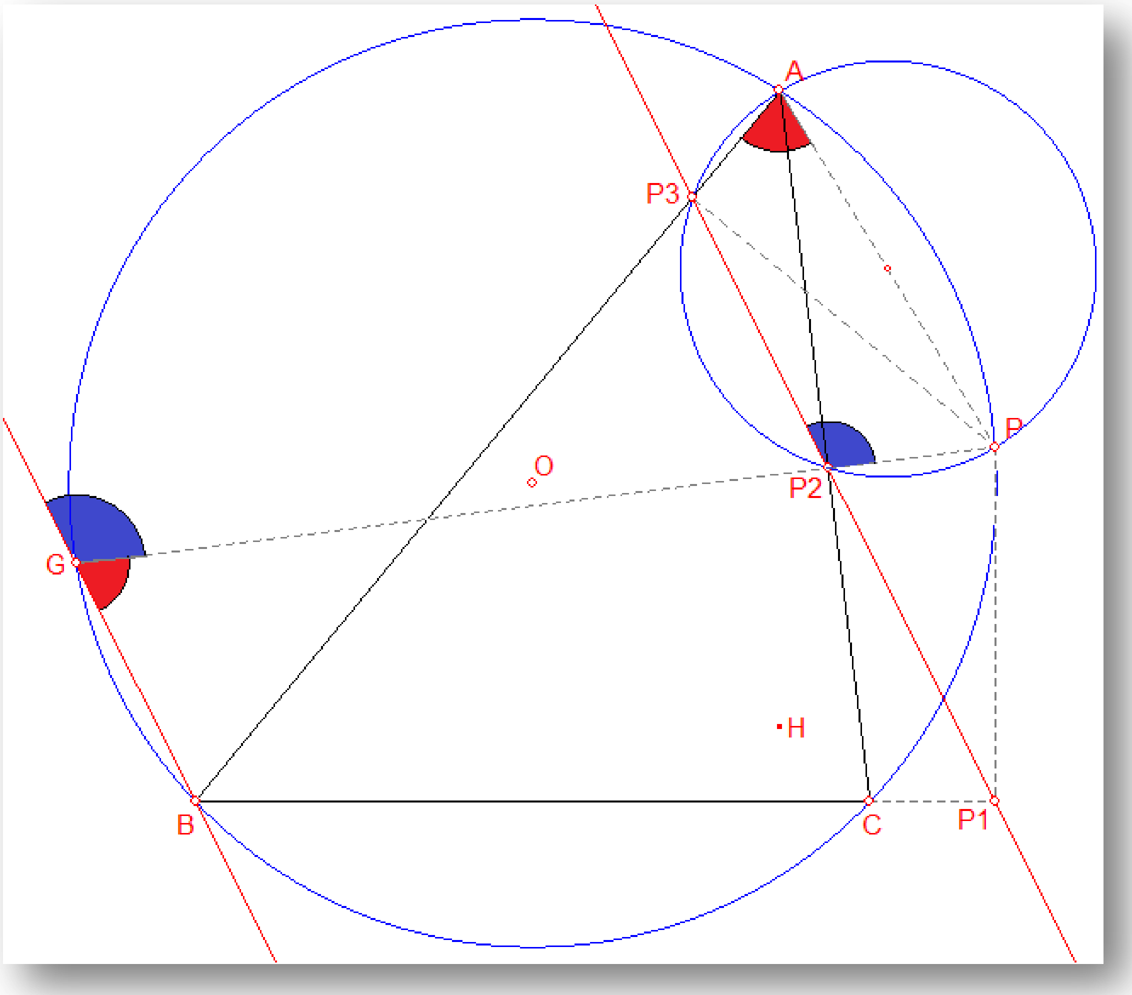


Hecho 2: Lema
Prolongamos la semirrecta PP_2 (P_2 punto sobre AC) hasta encontrar el punto G sobre la circunferencia circunscrita. Entonces BG es paralela a la Recta de Simson.
Dem. –

Como el cuadrilátero PP_2P_3A es concíclico, tenemos que: $\measuredangle PP_2P_3 = \boldsymbol{\alpha}; \measuredangle PAP_3 = \boldsymbol{\beta} \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 180º$

$\measuredangle PGB = \measuredangle PAP_3 = \measuredangle PAB = \boldsymbol{\beta},$ por ser los puntos AGBP son concíclicos.

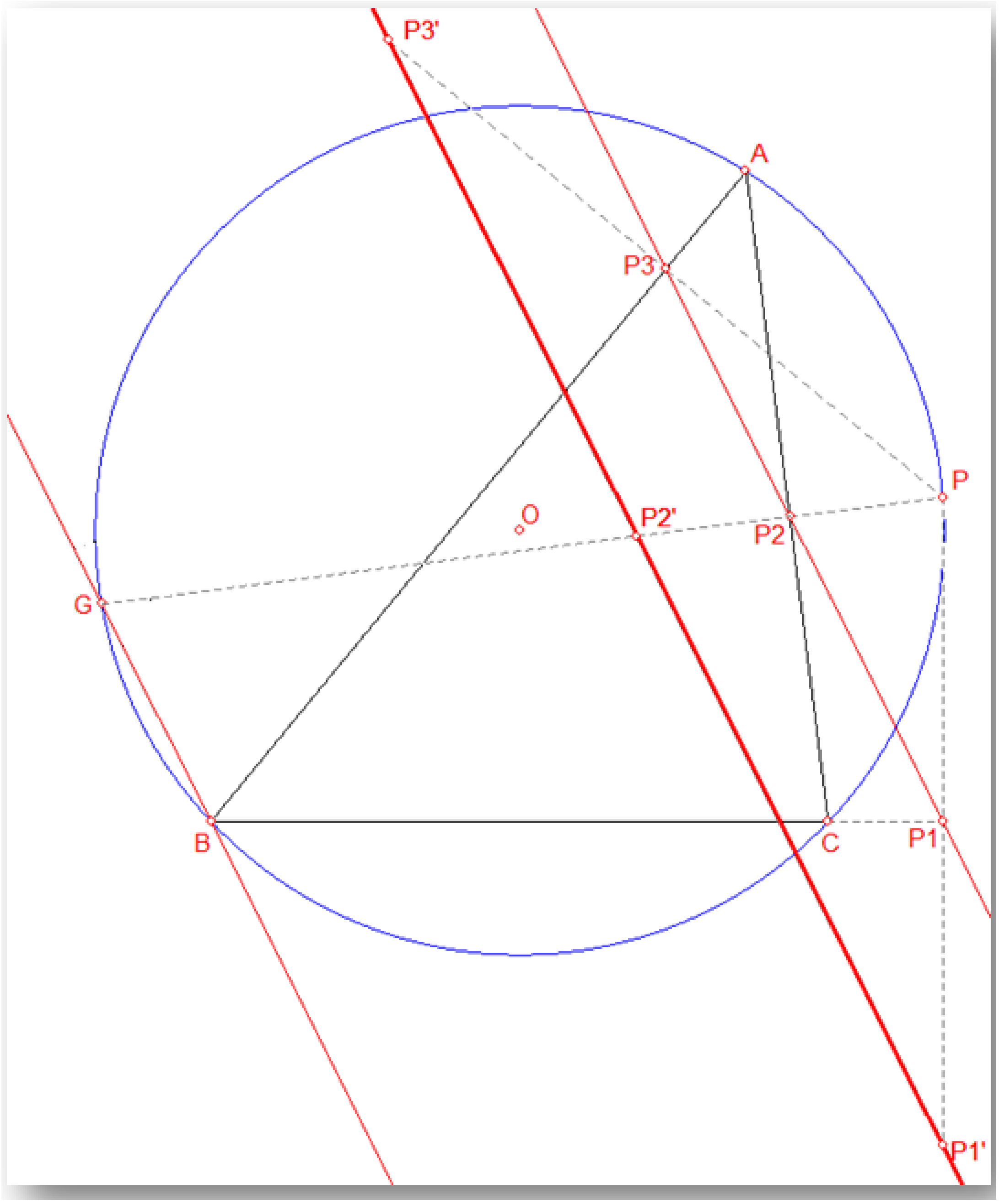
Por tanto, como las rectas BG y la de Simson se cortan con la transversal PG bajo el mismo ángulo, ambas rectas son paralelas.



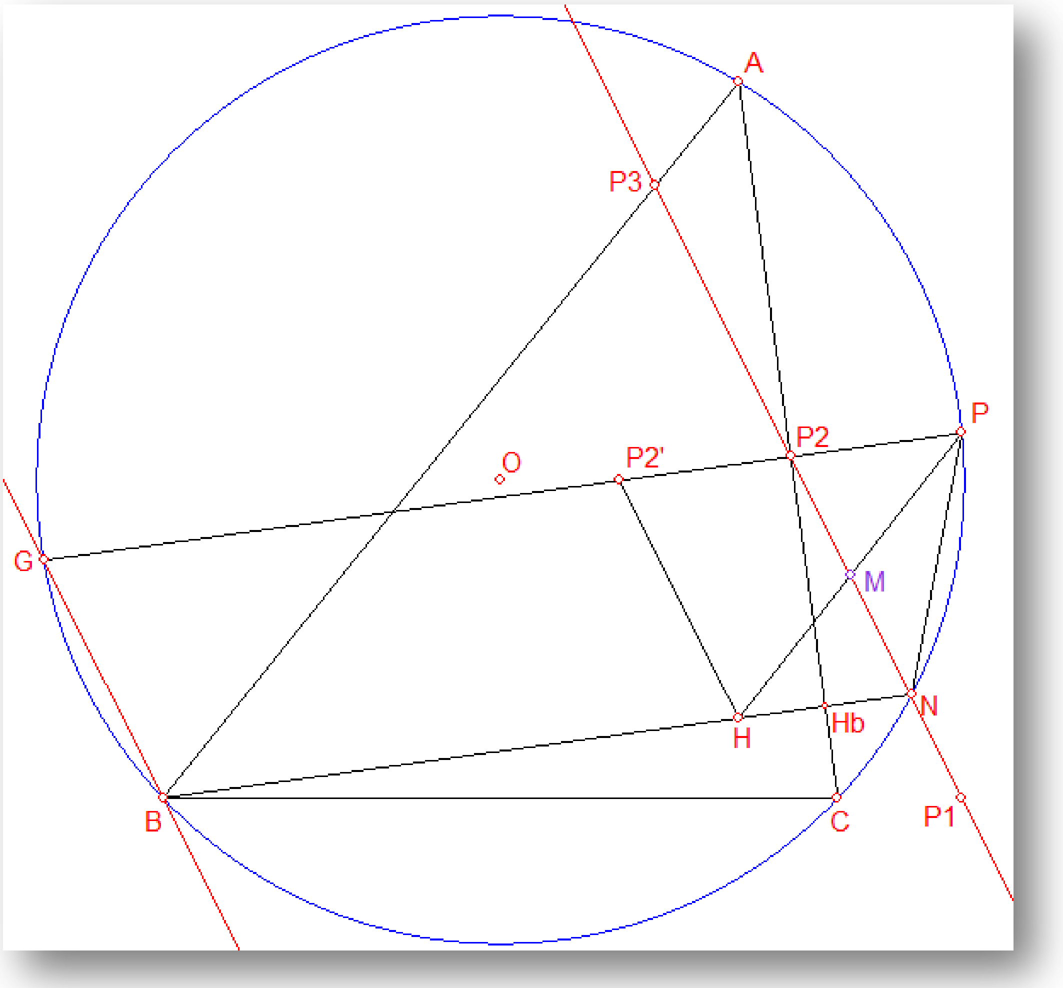
Hecho 3:

Transformamos los puntos P_1, P_2 y P_3 según una homotecia de centro P y razón 2. Sean los puntos transformados P'_1, P'_2 y P'_3. Dichos puntos estarán alineados (*Recta de Steiner*).

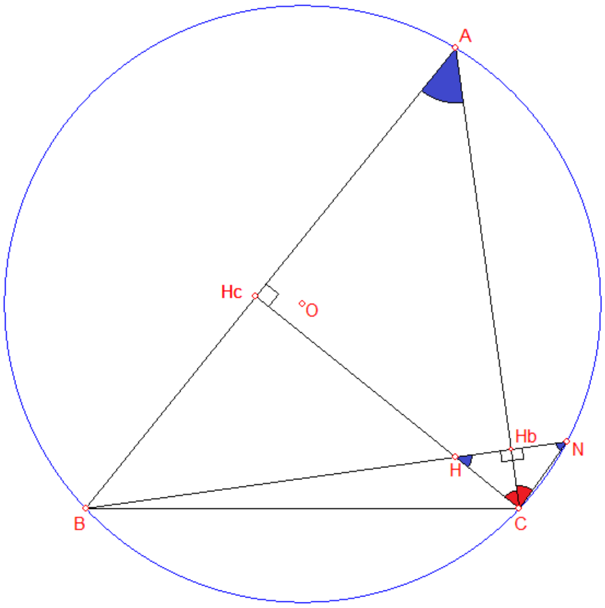
Dem. –



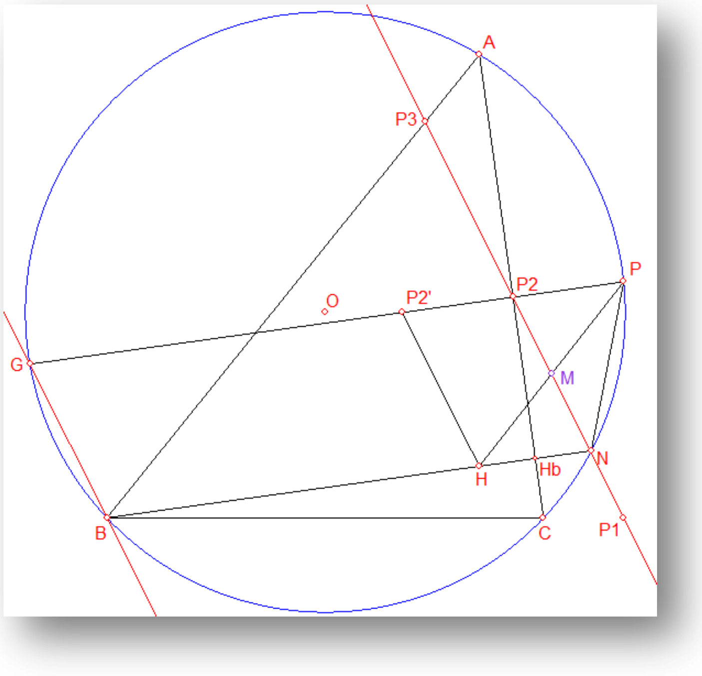
Hecho 4:
La recta de *Simson* correspondiente al punto P corta por la mitad al segmento PH, donde H es el ortocentro del triángulo ABC.
Dem. –



Sea el cuadrilátero BNPG, donde N es el punto de intersección de la altura trazada desde el vértice B y el propio circuncírculo. Este cuadrilátero resulta ser un trapecio isósceles ya que las cuerdas PG y NB son paralelas (ambas son perpendiculares al lado AC). Además tenemos otro trapecio isósceles en la figura del cuadrilátero $PNHP'_2$.
Esto último es así ya que el segmento P_2H_b es mediatriz de los segmentos PP'_2 y HN, respectivamente. En el caso de PP'_2 es debido a la homotecia de centro P y razón 2, transformando el punto P_2 en P'_2. En el otro caso, el punto H_b , pie de la altura es punto medio entre el ortocentro y el punto N. (Ver la siguiente figura)



Por tanto, a partir de ambos trapecios isósceles deducimos que los segmentos BG y P'_2H han de ser paralelos. Ahora bien el segmento BG era paralelo al Recta de *Simson* (hecho 2). Por tanto la recta de Simson P_2M es la paralela media del triángulo PP'_2H. En definitiva, M es el punto medio de HP.



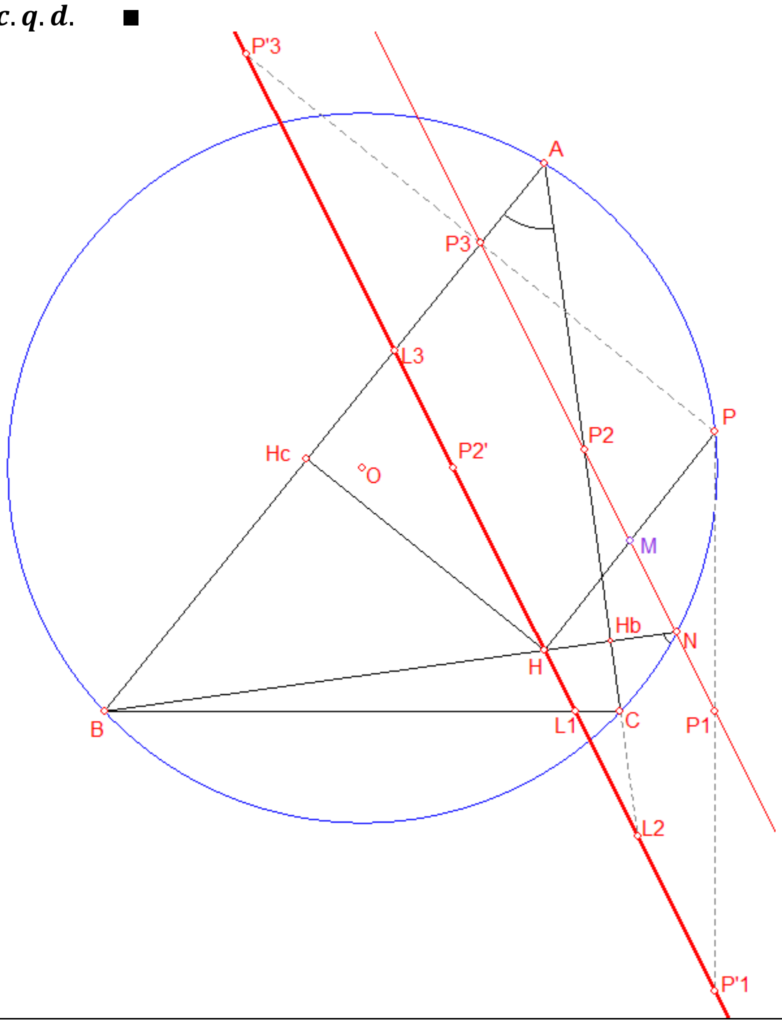
Hecho 5:

La recta de *Steiner* correspondiente al punto P pasa por H, ortocentro del triángulo ABC.

Dem. –

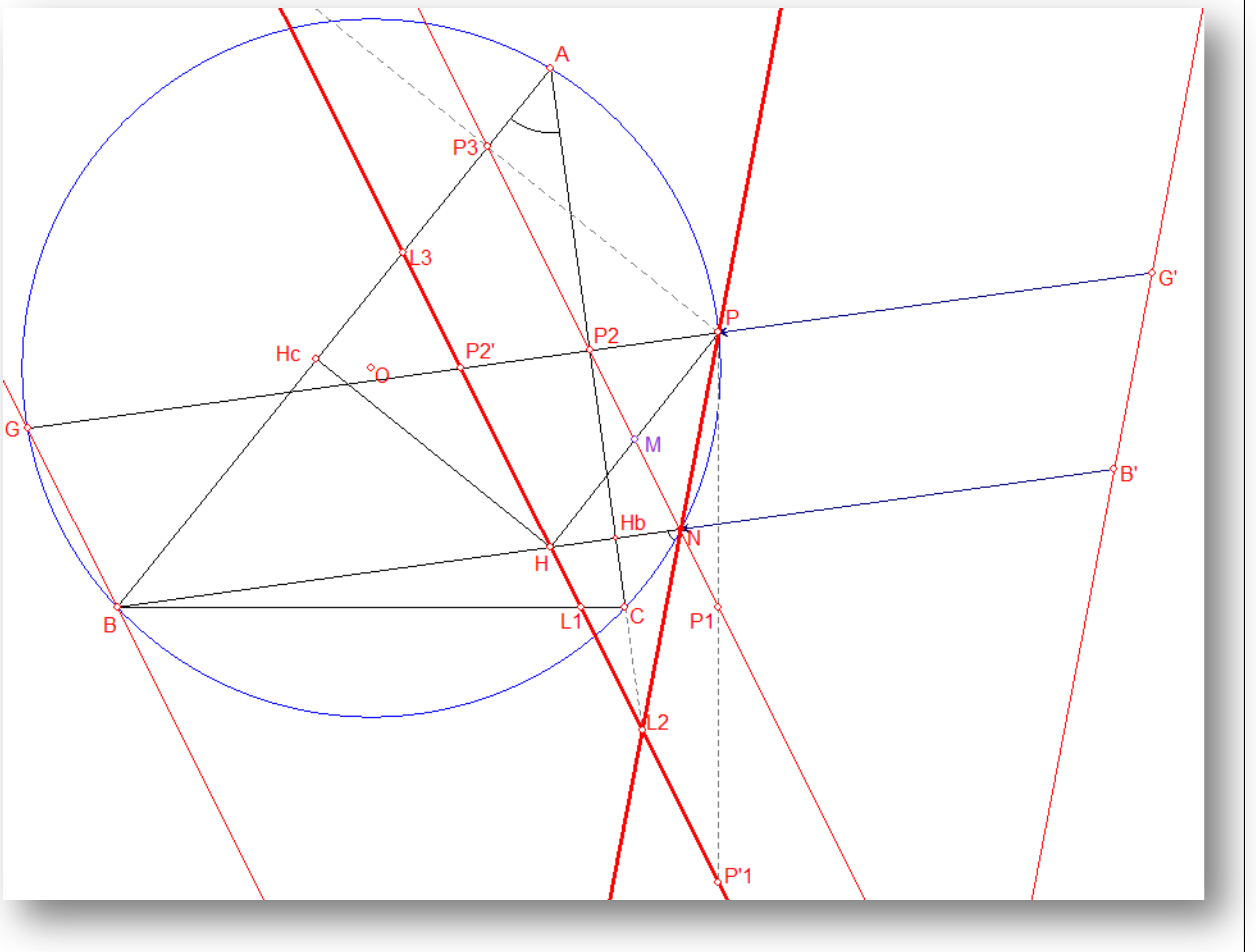
Esto hecho se deduce a partir de los hechos 3 y 4 anteriores. Es así ya que si la recta de Steiner era la transformada de la recta de Simson por una homotecia de centro P y razón 2, el punto H es el transformado por dicha homotecia del punto M. Por tanto H pertenece a la recta de Steiner y corta a los lados del triángulo ABC en L1, L2 y L3.

$c.q.d.$ ■



<u>Segunda Parte</u>: Justificación del Teorema inverso.

Si una recta r contiene al ortocentro H y corta a los lados del triángulo ABC en L1, L2 y L3, las simétricas de r respecto a AB, AC y BC concurren en un punto P del circuncírculo y la recta de Simson de P es paralela a r.



Observamos la siguiente construcción realizada a partir de la recta r dada. Trazamos por B la recta BG paralela a r y por el punto G, la recta paralela a la altura BH. Así además podemos determinar el punto P. Veamos que este punto verifica todas las condiciones exigidas en el Teorema.

Como ambas rectas BG y r, son paralelas, sus respectivas simétricas respecto del lado AC también lo serán y conservarán su misma distancia entre ellas. Por tanto, G→G' y P'_2→P. De igual modo con las otras simetrías, concluimos que P'_1→P y que P'_3→P. Las tres rectas concurren en un punto P.

Para ver que dicho punto P pertenece a la circunferencia basta aplicar el inverso del teorema de Simson ya que la recta $P_1P_2P_3$ es la transformada de la recta r por la homotecia de centro P y razón 1/2. Como estos puntos P_1, P_2, P_3 están determinados por la intersección de rectas paralelas a las respectivas alturas, son por tanto pie de las perpendiculares trazadas desde el punto P hasta los respetivos lados del triángulo ABC. Al estar alineados, por el recíproco del Teorema de Simson, el punto P ha de pertenecer a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

$c.q.d.$ ■