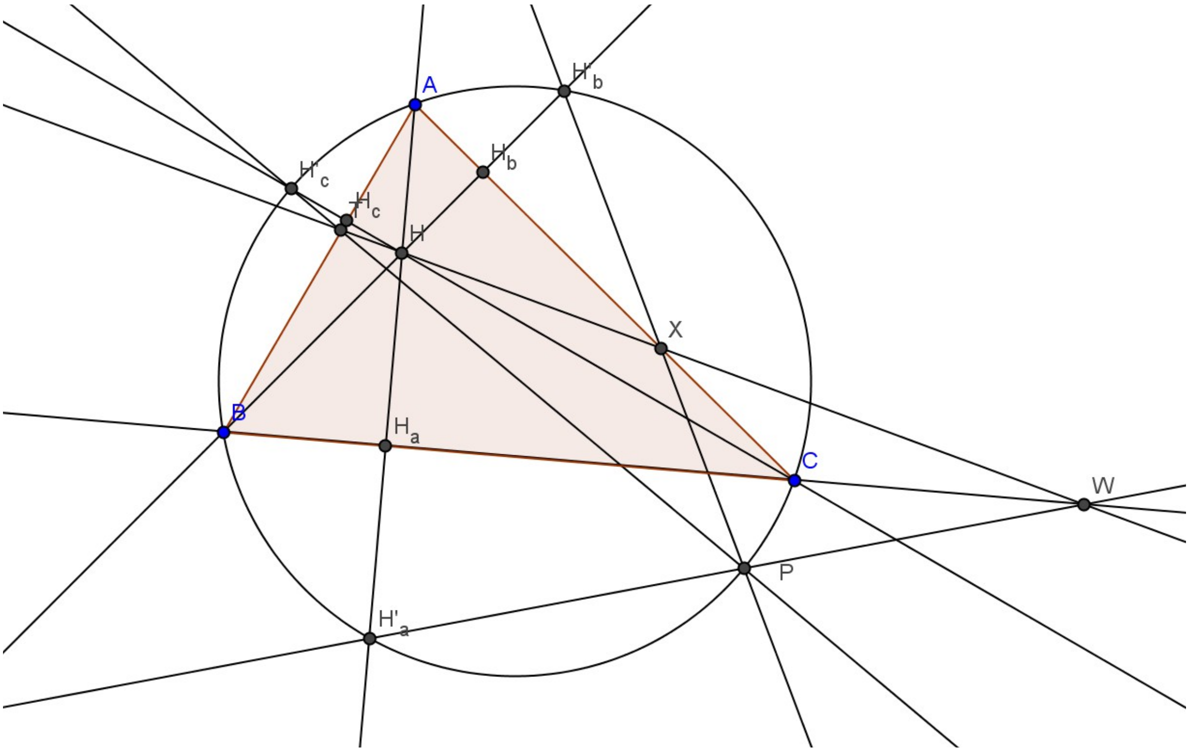
Problema 720
333. Teorema
Si una recta r contiene al ortocentro H corta a los lados del triángulo ABC en W,X,T, las simétricas de r respecto a AB, AC y BC concurren en un punto P del circuncírculo y la recta de Simson de P es paralela a r, e inversamente.

Johnson R.A.(1929) Advanced Euclidean Geometry. (pag. 210). Dover publications, INC. New York.

Solución del director.

Sea el triángulo ABC, de ángulos α,β,γ.



Sean H_a, H_b y H_c los pies de las alturas, y sean $H`_a$, $H`_b$ y $H`_c$ los puntos de corte de las alturas con la circunscrita. Dado que, por ejemplo $HBH_a=90º-\gamma$, que $<AH`_aB=\gamma$, en el triángulo rectángulo $BH_aH_a`$ tenemos que $<H_aBH`_a=90º-\gamma$, lo que significa que el simétrico de H respecto a BC es $H`_a$
Sea r una recta que contenga a H, que corte a BC en W, con $<HWB=\omega$.
La simétrica de r respecto a BC es, la recta $WH`_a$ que cortará a la circunscrita en P.
Es $< AH`_a P=90º-\omega$.
Sea X el punto de corte de AC con r.
Es $<CXW= \gamma - \omega$.

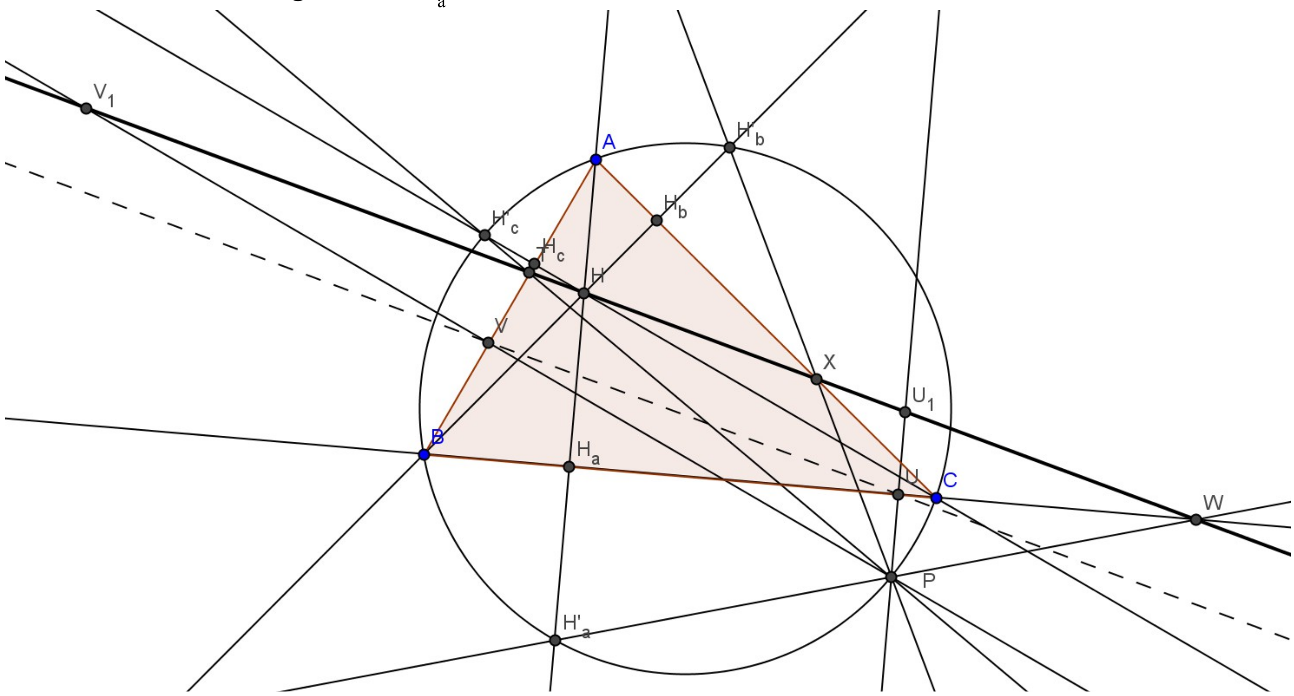
La simétrica de r respecto a AC es tal que contiene a $H`_b$ por ser este el simétrico de H como respecto a AC hemos visto análogamente con el caso $H_a$. Sea Q de la circunscrita tal que $H`_b XQ$ sea la recta en cuestión. Debe de ser $<BH`_bQ=<HH`_bQ=90º- (\gamma - \omega)= 90º- \gamma + \omega$

Dado que si consideramos el ángulo ACQ , es la suma de ACB y BCQ, es decir γ, y $<BCQ=<BH`_bQ=<HH`_bQ=90º-(\gamma-\omega)=90º-\gamma+\omega$, por lo que $<ACQ=90º+\omega$; ello significa que al ser $<AH`_aP=90º-\omega$, han de ser Q y P coincidentes, por pertenecer a la circunscrita por construcción.

Por último consideremos la simétrica de r con AB Sea T el punto de corte de r con AB. $<BTW=\gamma+\alpha-\omega$. Sea R el punto de corte de la simétrica estudiada con la cirunscrita.
Es $<CH'_cR=<H_cH'_cT=90º-<H_cTH`_c=90º-(180º-<BTW)=90º-(180º-\gamma-\alpha+\omega)=90º-\beta-\omega$
Así es $<CBR=<CH'_cR=90º-\beta-\omega$. Así, $<ABR=90º-\omega$, y de nuevo R=P.

Estudiemos la recta de Simson de P.

Si trazamos la perpendicular a BC por P, cortará a BC en un punto U que es el punto medio del segmento PU*, siendo U* el punto en que dicha perpendicular cortará a r, por la correspodiente homotecia con el triángulo WHH'_a .



Si trazamos la perpendicular a AB por P, cortará a AB en V y a r en V*, siendo el triángulo TPV* semejante al H'_cTH; es decir, V es el punto medio de V*P.
Ello quiere decir que la recta UV(la de Simson de P), es, cqd, paralela a r.