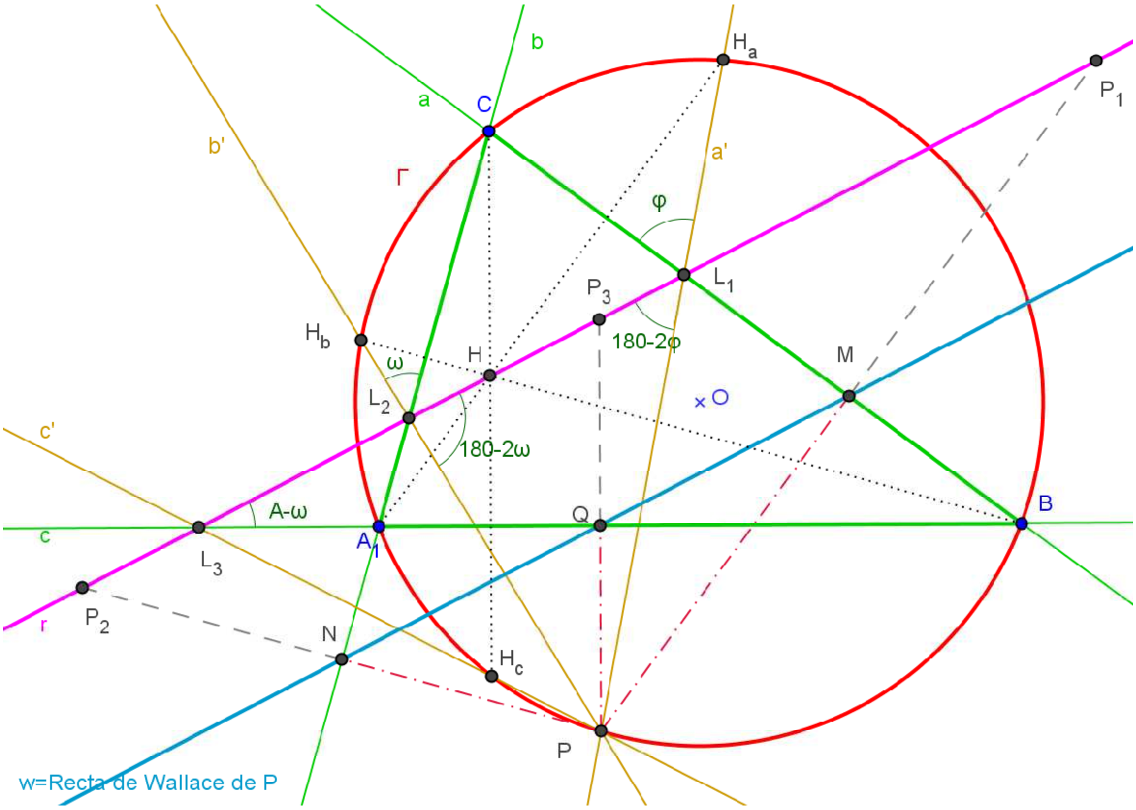
***Problema* 720.**

333. *Teorema*

Si una recta r contiene al ortocentro H corta a los lados del triángulo ABC en L_1, L_2 y L_3, las simétricas de r respecto a AB, AC y BC concurren en un punto P del circuncírculo y la recta de Simson de P es paralela a r, e inversamente.

Johnson R.A.(1929) Advanced Euclidean Geometry. (pag. 210). Dover publications, INC. New York.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



-Concurrencia de las simétricas de r.

Sean a', b', c' las simétricas de r respecto de los lados a, b, c del triángulo. Como el simétrico del ortocentro respecto de un lado yace en la circunferencia circunscrita (problema nº 166 de mayo de 2004), estas tres rectas pasan por esos simétricos, a' por el de H respecto de a, punto H_a, b' por H_b y c' por H_c. El triángulo formado por los H_i es homotético al triángulo órtico (razón 2) y sus ángulos son conocidos.

Sea P el punto de corte de a' y b'. Para demostrar que P está sobre la circunferencia circunscrita probaremos que el ángulo $\measuredangle H_bPH_a$ es igual al ángulo $\measuredangle H_bH_cH_a = 180 - 2\measuredangle BCA$. O lo que equivalente: que$\measuredangle L_1L_2P + \measuredangle L_2L_1P = 2\measuredangle BCA$.

En el triángulo PL_1L_2, tenemos $\measuredangle L_1L_2P = 180 - 2\omega$, $\measuredangle L_2L_1P = 180 - 2\varphi$, siendo $\omega = \measuredangle CL_2L_1$, $\varphi = \measuredangle CL_1L_2$ y $\measuredangle BCA = 180 - (\omega + \varphi)$. Con esto tenemos para $\measuredangle L_1L_2P + \measuredangle L_2L_1P = 360 - 2\omega - 2\varphi = 2\measuredangle BCA$.

De forma similar se puede demostrar que a' y c' (o b' y c') se cortan sobre la c. circunscrita. Como a' sólo puede cortar a esta circunferencia en P (además de H_a) deducimos que las tres rectas a', b', c' concurren en P como se pretendía demostrar (el cuadrilátero $H_aH_bH_cP$ es cíclico).

-La recta de Simson-Wallace de P es paralela a r

Denotamos por P_1, P_2, P_3 los simétricos de P respecto de los lados a, b y c respectivamente y sean M, N, Q, los pies de las perpendiculares desde P a esos lados. Evidentemente, por la construcción de P, los puntos P_i están alineados (pertenecen a r), aunque también es así para cualquier punto situado sobre la circunscrita. Tengamos en cuenta que M, N, Q definen la recta de Simson-Wallace de P. En efecto: los triángulos PMN y PP_1P_2 son semejantes ya que el ángulo en P es común y los dos lados del mismo son proporcionales, por tanto el tercer lado P_1P_2 es paralelo a MN. Análogamente P_1P_3 es paralelo a MQ. De la alineación de M, N, Q se deduce la de P_1, P_2, P_3 y el paralelismo de ambas.

-Recíproco

Dado P en la circunferencia circunscrita, podemos construir a partir de él una recta r que pase por el ortocentro y sea paralela a la recta de Wallace de P. Los simétricos de P respecto de los lados están alineados, como hemos dicho antes y esa recta, pasa por el ortocentro del triángulo tal como se demostró en el problema 192 (Sept de 2004). Y con esto concluimos.

■