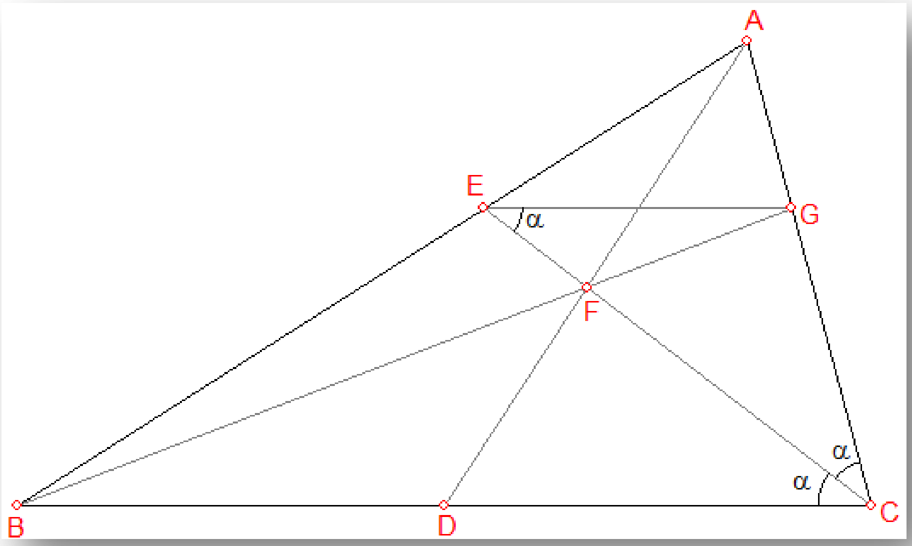
Problema 721.-
En un triángulo ABC, la mediana AD corta a la bisectriz CE en F. Demostrar que CF/FE = (BC/AC) + 1.

D'Ignazio, I., Suppa, E. (2001): Il Problema geometrico, Dal compasso al Cabri.
Interlinea Editrice. (pág. 274)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



Trazando la ceviana desde B por F, esta cortaría en G al lado AC. Como las tres cevianas son concurrentes en F, por el Teorema de Ceva, tendríamos la siguiente igualdad:

$$\frac{AE}{EB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CG}{GA}=1; \quad \frac{AE}{EB}.\frac{CG}{GA}=1; \quad \frac{AE}{EB}=\frac{GA}{CG}$$

Si llamamos $\mathrm{AE}=\mathrm{k.c}$ y $\mathrm{EB}=(1-\mathrm{k}).\mathrm{c}$, tendríamos entonces que notar a CG y GA del modo $\mathrm{CG}=(1-\mathrm{k}).\mathrm{b}$ y $GA=\mathrm{k.b}$, respectivamente.

En definitiva, $\mathrm{AE}=\mathrm{k.c}$ y $\mathrm{AG}=\mathrm{k.b}$
Por tanto, el triángulo AEG sería semejante al inicial ABC y, así el lado EG sería paralelo al lado BC.
De este modo, el lado $\mathrm{EG}=\mathrm{k.a}$
Por otra parte, el triángulo GEC sería isósceles ya que $\measuredangle GEC=\measuredangle ECB=\measuredangle GCE=\alpha$.
Por tanto, $EG=CG$.
Esta última igualdad $EG=CG$, nos dice que $k.a=(1-k)b \rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1-k}{k}=\frac{1}{k}-1 \quad (I)$

Por último, los triángulos EGF y CFB son semejantes ya que los segmentos EG y BC son paralelos como ya hemos visto anteriormente.
De esta semejanza, obtenemos la siguiente relación $\frac{BC}{EG}=\frac{CF}{FE}\rightarrow \frac{a}{k.a}=\frac{1}{k}=\frac{CF}{FE} \quad (II)$
De ambas relaciones (I) y (II), alcanzamos la relación deseada:
$\frac{a}{b}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{k}-1=\frac{CF}{FE}\quad -1\rightarrow \boldsymbol{\frac{CF}{FE}=\frac{BC}{AC}+1}$ ■ ***cqd***