

# Problema 721

En un triángulo  $\triangle ABC$ , la mediana  $\overline{AD}$  corta la bisectriz  $\overline{CE}$  en F.

Demostrar que  $\frac{\overline{CF}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} + 1$ .

D'Ignazio, I., Suppa, E. (2001): Il Problema geometrico, Dal compasso al Cabri. Interlinea Editrice. (pag. 274)

Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Sea P el área del triángulo  $\triangle AFC$ , Q el área del triángulo  $\triangle FDC$ ,

R el área del triángulo  $\triangle AEF$ , y S el área del triángulo  $\triangle DEF$ .

Dos triángulos que tienen la misma altura las áreas son proporcionales a las bases.

Los triángulos  $\triangle DEC$ ,  $\triangle BDE$  tienen la misma base y altura, entonces:

$$S_{BDE} = Q + S.$$

Los triángulos  $\triangle AFC$ ,  $\triangle AEF$  tienen la misma altura, entonces:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FE}} = \frac{P}{R}.$$

Los triángulos  $\triangle FDC$ ,  $\triangle DEF$  tienen la misma altura, entonces:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FE}} = \frac{Q}{S}.$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FE}} = \frac{P}{R} = \frac{Q}{S} = \frac{P+Q}{R+S}.$$

Aplicando la propiedad de la bisectriz a la bisectriz  $\overline{CE}$  del triángulo  $\triangle ABC$ :

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Los triángulos  $\triangle AEC$ ,  $\triangle EBC$  tienen la misma altura, entonces:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{2(Q+S)}{P+R}.$$

Los triángulos  $\triangle ADC$ ,  $\triangle ABD$  tienen la misma base y altura, entonces:

$$P+Q = R+S+Q+S.$$

$$P = R+2 \cdot S.$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FE}} - \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FE}} - \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{P}{R} - \frac{2(Q+S)}{P+R} = \frac{P+Q}{R+S} - \frac{2(Q+S)}{R+2 \cdot S+R} = \frac{R+2 \cdot S+Q}{R+S} - \frac{Q+S}{R+S} = 1.$$

Entonces,  $\frac{\overline{CF}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} + 1$ .

