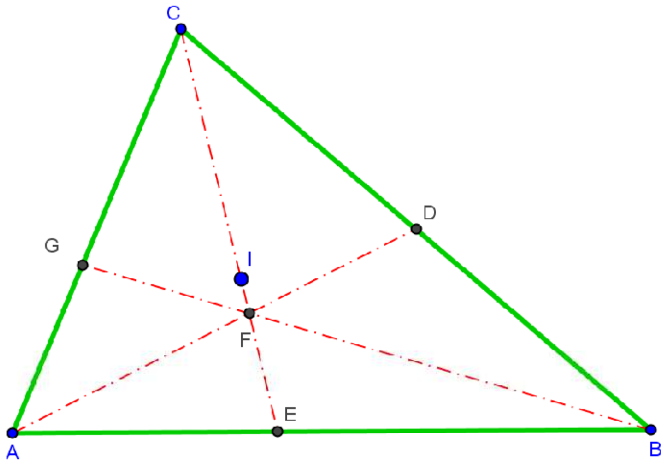
***Problema* 721**

(b) *En un triángulo ABC, la mediana AD corta a la bisectriz CE en F.*

Demostrar que $\frac{CF}{FE} = \frac{BC}{AC} + 1.$

D'Ignazio, I., Suppa, E. (2001): Il Problema geométrico, Dal compasso al Cabri. Interlinea Editrice. (pag. 274)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Desde B trazamos la recta BF que corta al lado opuesto en G. En el triángulo AEC con la transversal BG, aplicando el teorema de Menelao podemos poner:

$$\frac{GA}{GC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{BE}{AB} = 1 \qquad (*)$$

Ahora por el teorema de Ceva para la cevianas concurrentes en F tenemos

$$\frac{GA}{GC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{BE}{AE} = -1.$$

Pero $\frac{DC}{DB} = -1$ por ser D es el pie de la mediana, por tanto, $\frac{GA}{GC} = \frac{AE}{BE}$ y sustituyendo en $(*)$

$$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{BE}{AB} = 1 \Leftrightarrow \frac{CF}{FE} = \frac{AB}{AE} \qquad (**)$$

Por el teorema de la bisectriz $AE = \frac{bc}{a+b} = \frac{AC \cdot AB}{BC+AC}$. Sustituyendo en la expresión (**) resulta finalmente:

$$\frac{CF}{FE} = \frac{AB \cdot (BC + AC)}{AC \cdot AB} = \frac{BC + AC}{AC} = \frac{BC}{AC} + 1$$

como queríamos demostrar.

■