Problema 722

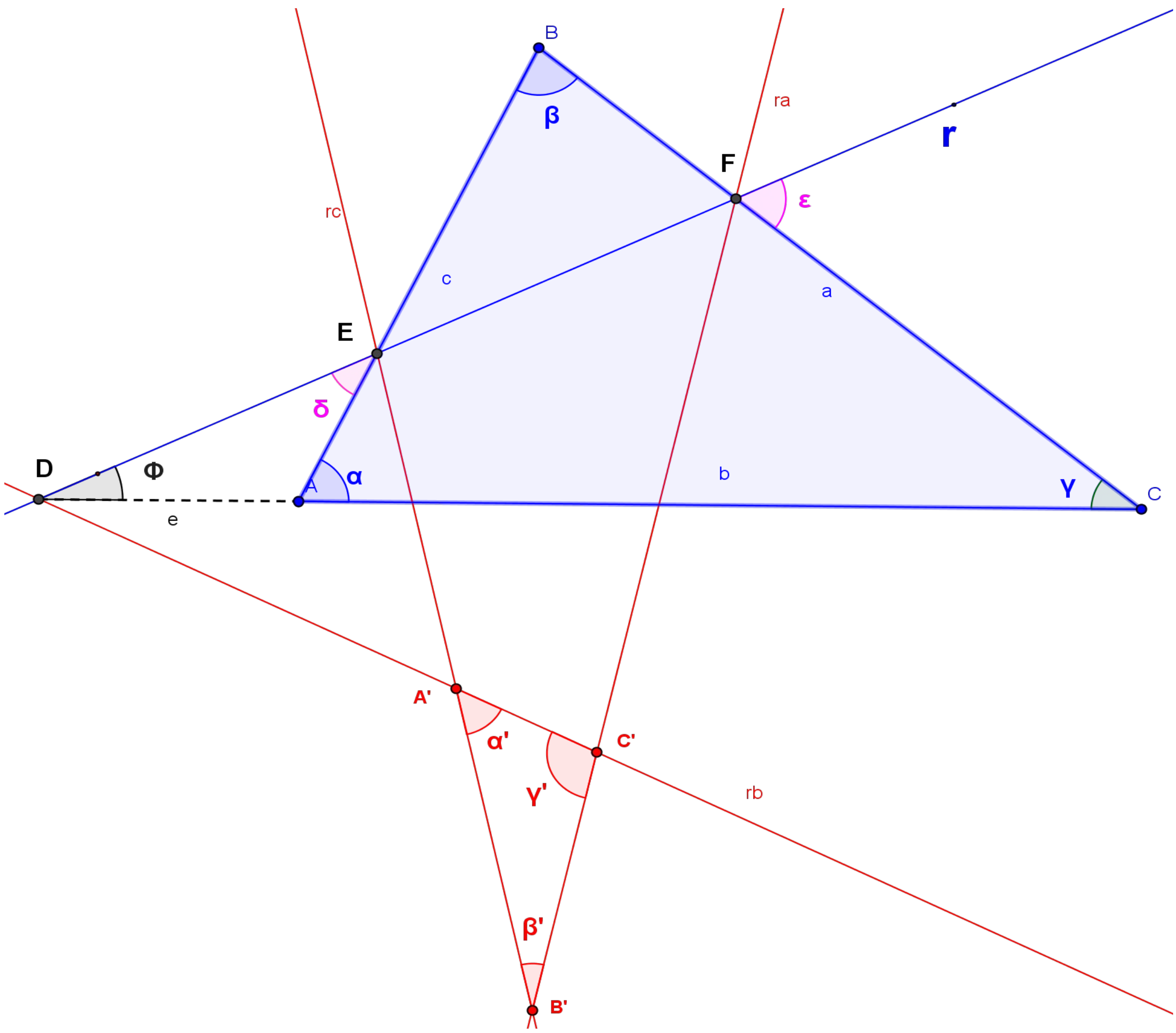
Dado un triángulo ABC, consideremos una recta genérica r.

Sean r_a, r_b y r_c las simétricas de r respecto a a, b y c. Demostrar que los triángulos que forman r_a, r_b y r_c son semejantes.

Solución de Adolfo Soler

Sea α, β ,γ los ángulos del triángulo ABC y α', β ',γ' los ángulos del triángulo A'B'C' formado por las rectas simétricas a r con respecto a los lados del triángulo ABC.

Sea δ y ε los ángulos que forma la recta r con los lados del triángulo a los que corta r (o rectas que contienen a esos lados).



Del triángulo EBF, se desprende que $\beta = \pi - (\delta + \varepsilon)$

Del triángulo DEA se desprende que $\Phi = \alpha - \delta$

Del triángulo A'DE se desprende que $\boldsymbol{\alpha'} = \pi - 2\Phi - 2\delta = \boldsymbol{\pi - 2\alpha}$

Del triángulo B'EF se desprende que $\boldsymbol{\beta'} = 2\,(\delta + \varepsilon) - \pi = \boldsymbol{\pi - 2\,\beta}$

Del triángulo A' B' C' se desprende que $\boldsymbol{\gamma'} = \pi - (\alpha' + \beta') = \boldsymbol{\pi - 2\,\gamma}$**.**

Con lo cual, los ángulos interiores del triángulo A'B'C', dependen sólo de los ángulos interiores del triángulo ABC y por tanto son independientes de cual sea la recta r y por tanto todos los triángulos que forman las rectas r_a , r_b y r_c son semejantes.

c.q.d