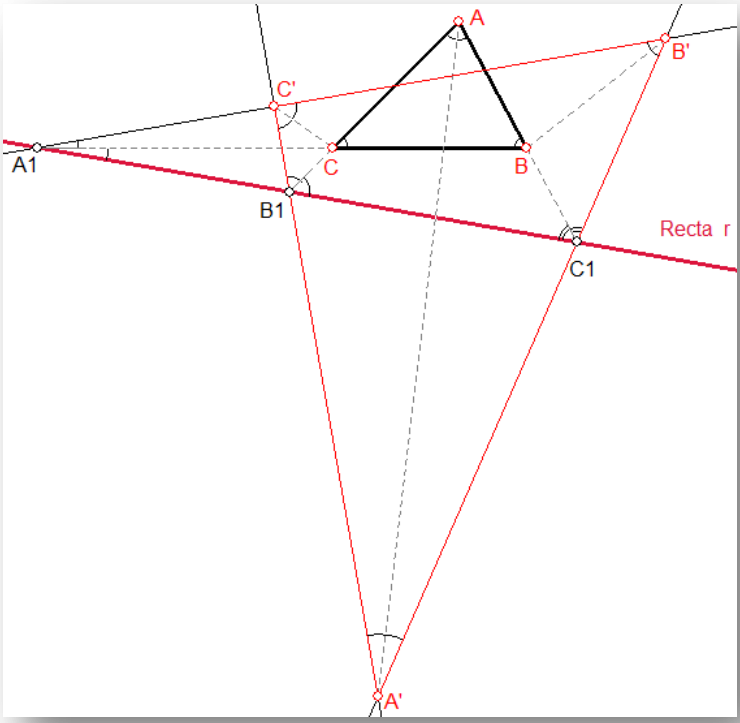
Problema 722.-

Dado un triángulo ABC, consideremos una recta genérica r. Sean r_a , r_b y r_c , las simétricas de r respecto de los lados *a, b* y *c.* Demostrar que los triángulos que forman r_a , r_b y r_c son semejantes.

Barroso, R. (2014): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



El vértice B' lo determinan r_a y r_c, las rectas simétricas de la *recta r,* respecto de los lados a y c, respectivamente.

En el triángulo ΔA_1C_1B, se ha de verificar la siguiente igualdad entre ángulos:

$\angle B = \angle BA_1C_1 + \angle BC_1A_1$.

Por tanto, en el triángulo $\Delta A_1C_1B'$, se verificará:

$$\angle B' = 180º - (\angle B'A_1C_1 + \angle B'C_1A_1)$$
$$\angle B' = 180º - (2\angle BA_1C_1 + 2\angle BC_1A_1)$$
$$\angle B' = 180º - 2\angle B$$

$$\boldsymbol{\angle B' = 180º - 2\,\angle B}$$

De forma similar, obtendríamos el valor de los otros dos ángulos.

En concreto, veamos que $\boldsymbol{\angle C' = 180º - 2\,\angle C;}$

En efecto:

$$\angle CB_1C_1 = \angle C + \angle CA_1B_1 \rightarrow \angle C' = 2\angle CA_1B_1 + (180º - 2\angle CB_1C_1) \rightarrow \angle C' = 180º - 2\angle C.$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{\angle C' = 180º - 2\angle C}$$

Y, por fin:

$$\boldsymbol{\angle A' = 180º - 2\,\angle A}$$

En definitiva, los ángulos de todos los triángulos así construidos tienen el mismo valor.

Por tanto, todos los triángulos así construidos serán semejantes entre sí, no dependiendo de la posición que tenga en el plano del triángulo ABC la recta r. $\boldsymbol{c.q.d}$ ■