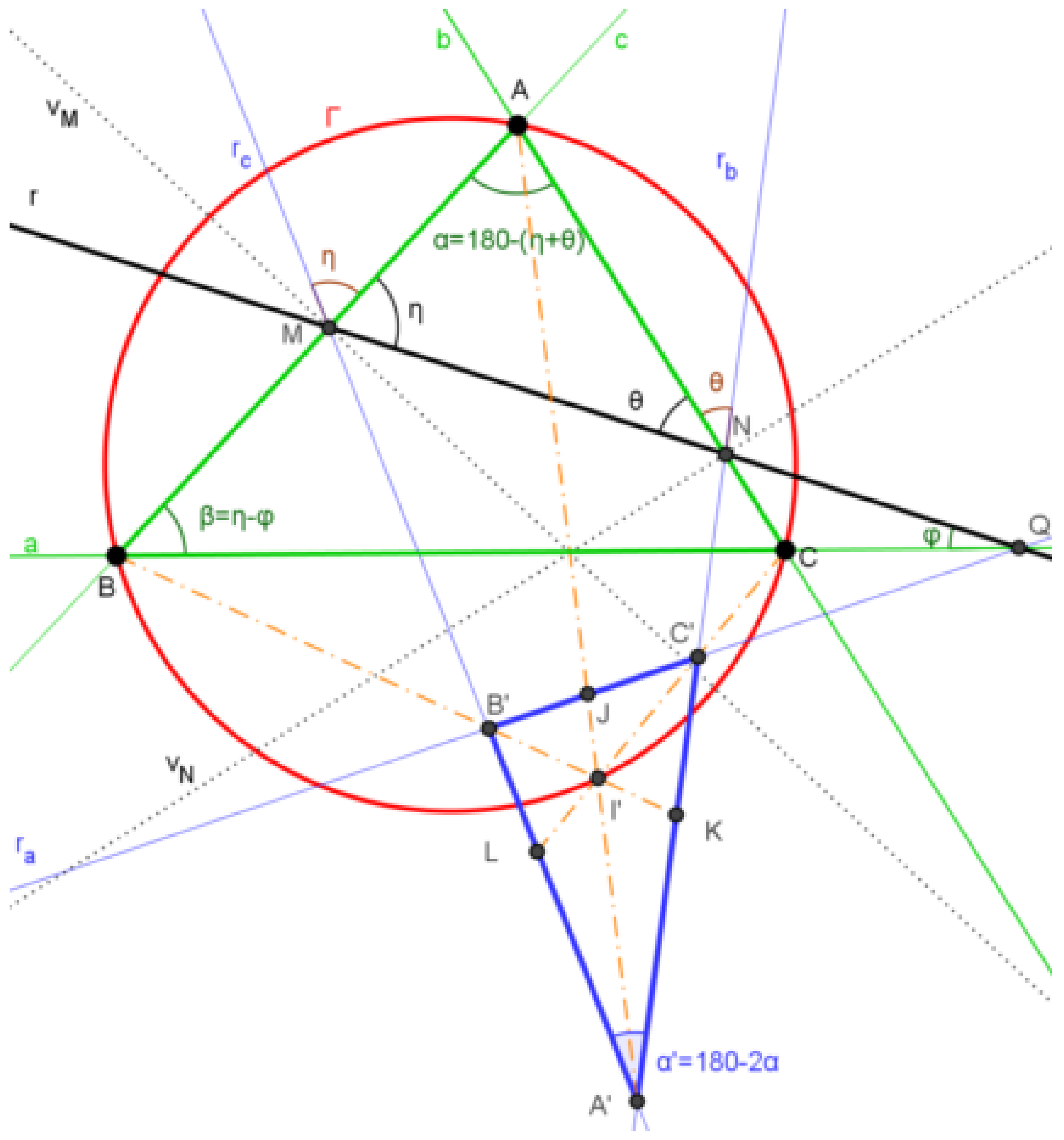
**Problema 722**.- *Dado un triángulo ABC, consideremos una recta genérica r. Sean $r_a$, $r_b$ y $r_c$ las simétricas de r respecto a a, b y c. Demostrar que los triángulos que forman $r_a$, $r_b$ y $r_c$ son semejantes.*

Barroso, R. (2014): Comunicación personal.

**Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.**

Si la recta $r$ corta a los lados $AB, AC$ y $BC$ en los puntos $M, N$ y $Q$ respectivamente y formando ángulos $\eta, \theta$ y $\varphi$ como se muestra en la figura, en función de ellos, los ángulos de $ABC$ son $\alpha = 180 - (\eta + \theta), \beta = \eta - \varphi$ y $\gamma = \theta + \varphi$.




Si llamo $A'B'C'$ a los vértices del triángulo asociado al $ABC$ mediante las simetrías descritas en el enunciado, tendremos para el ángulo en $A'$ el valor de $\alpha' = 180 - 2\alpha$. En el triángulo $B'MQ$ se tiene $\measuredangle MB'Q = 2(\eta - \varphi) = 2\beta$, y por tanto $\beta' = \measuredangle A'B'C' = 180 - 2\beta$. Por último el tercer ángulo ha de ser $\gamma' = 180 - 2\gamma$. Esto demuestra que los triángulos formados con diferentes rectas $r$ son todos semejantes entre sí y, además, semejantes al triángulo órtico de $ABC$, pues éste tiene esos mismo ángulos.

Vamos a demostrar también que las cevianas que unen los vértices homólogos del triángulo $T = ABC$ con el triángulo asociado $T' = A'B'C'$ son concurrentes en el incentro $I'$ de $T'$ y que este incentro yace en la circunferencia circunscrita a $T$.

Que los triángulos $T$ y $T'$ son perspectivos es inmediato; el eje de perspectiva es la recta $r$.

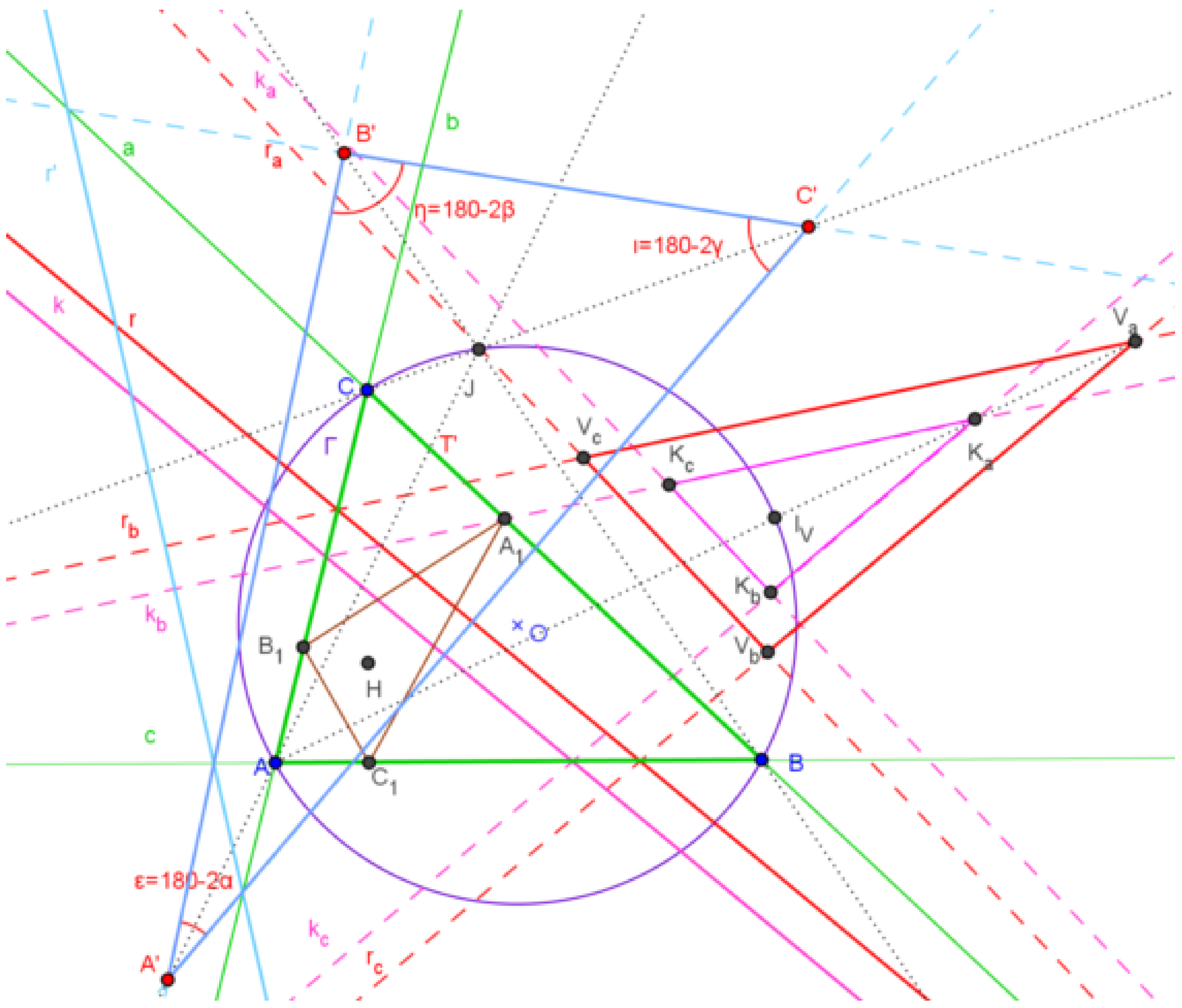
Observando el triángulo $C'NQ$ vemos que $C$ es su incentro, por tanto $CC'$ es una bisectriz de $T'$.

En $MNA'$ las rectas $CA$ y $BA$ son dos bisectrices exteriores, por tanto $A$ el excentro opuesto a $A'$ y en consecuencia $AA'$ es otra bisectriz.

La necesidad de la concurrencia de las cevianas implica que $BB'$ es la tercera bisectriz.

Del valor del ángulo $\alpha' = 180 - 2\alpha$ deducimos, una vez que sabemos que $I'$ es el incentro, que el ángulo $\measuredangle B'I'C' = 90 + \frac{1}{2}(180 - 2\alpha) = 180 - \alpha$, lo que nos dice que el cuadrilátero $ABI'C$ es cíclico, lo que demuestra la pertenencia de $I'$ a la circunscrita.

**Reflexión final**




De todo lo anterior deducimos que los triángulos asociados a dos rectas paralelas, además de semejantes, tienen sus lados homólogos paralelos y comparten el mismo incentro, que es también el centro de homotecia que pasa de uno a otro. Por consiguiente, dada una dirección le hacemos corresponder un punto único de la circunferencia circunscrita $\Gamma$, y, recíprocamente, dado un $J$ punto de esta última podemos encontrar un triángulo semejante al triángulo órtico, del cual es su incentro y una recta $r'$, que mediante simetrías engendra ese triángulo como se muestra en la figura adjunta. Hay pues hay una correspondencia biunívoca entre direcciones y puntos de la circunferencia $\Gamma$. Y con esto concluimos.

■