

Problema 723

Dado un triángulo ABC , con ortocentro H , consideremos una recta r que sea tangente en V a una determinada circunferencia Ω de centro H .

i) Sean r_a , r_b y r_c las simétricas de r respecto a los lados a , b y c . Demostrar que los triángulos que forman r_a , r_b y r_c de vértices V_a , V_b y V_c son congruentes, cualquiera que sea V de Ω .

ii) Sean dos triángulos V_a , V_b y V_c , V^*_a , V^*_b y V^*_c formados de esta manera a partir de V y V^* , puntos de Ω . Demostrar que son transformados por un giro de ángulo $\angle VHV^*$ y cuyo centro es un punto W de la circunscrita a ABC .

iii) Sea s la recta que contiene a VV^* , y sea s_1 la recta paralela a s por H . Las simétricas de s_1 por a , b y c se cortan en un punto W_1 de la circunferencia circunscrita (problema 720 de esta revista). Demostrar que W_1 es diametralmente opuesto a W .

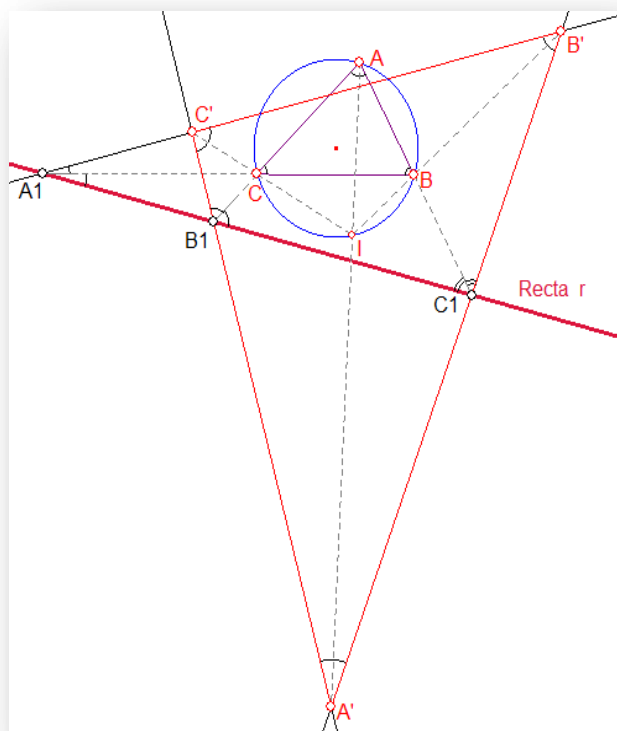
Barroso, R. (2014): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Apéndice al problema 722.

Lema 1.- Si consideramos el triángulo $A_1B'C_1$, tenemos que B es el Incentro del mismo.

Dem.-



Esto es fácil de ver sin más que tener en cuenta que el vértice B' lo determinan r_a y r_c , las rectas simétricas de la recta r , respecto de los lados a y c , respectivamente. Por tanto, el punto B pertenece a las bisectrices de los ángulos en A_1 y C_1 , respectivamente. Por tanto, B será el Incentro del triángulo $A_1B'C_1$.

Lema 2.- Las bisectrices interiores del triángulo $A'B'C'$ pasan por los vértices del triángulo ABC .

Dem.-

En el triángulo $B_1A'C_1$ resulta que, en este caso, el vértice A será uno de los exincentros de dicho triángulo. Observamos que, en efecto, ahora las rectas B_1C y C_1B son bisectrices exteriores del triángulo $B_1A'C_1$. Por tanto, la bisectriz interior que parte desde el tercer vértice, A' se encuentra con las dos anteriores en el punto A (exincentro del triángulo $B_1A'C_1$).

De igual forma, resulta ser C uno de los exincentros del triángulo $B_1C'A_1$.

En definitiva, las bisectrices interiores del triángulo $A'B'C'$ pasan por los vértices del triángulo ABC .

Lema 3.- El Incentro I del triángulo $A'B'C'$ pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo inicial ABC .

Dem.-

En efecto, por los resultados anteriores, sabemos que las bisectrices $B'I$ y $C'I$ pasan por los vértices B y C , respectivamente.

En el triángulo $B'C'I$, conocemos el valor de los ángulos en B' y C'

$\angle IB'C' = 90^\circ - B$ y $\angle IC'B' = 90^\circ - C$. De esta forma, el ángulo en I será $\angle B'IC' = 180^\circ - A$.

Luego entonces el punto I pertenece al arco capaz del segmento BC y de ángulo A . Por tanto, I ha de pertenecer a la circunferencia circunscrita al triángulo inicial ABC .

Problema 723.-

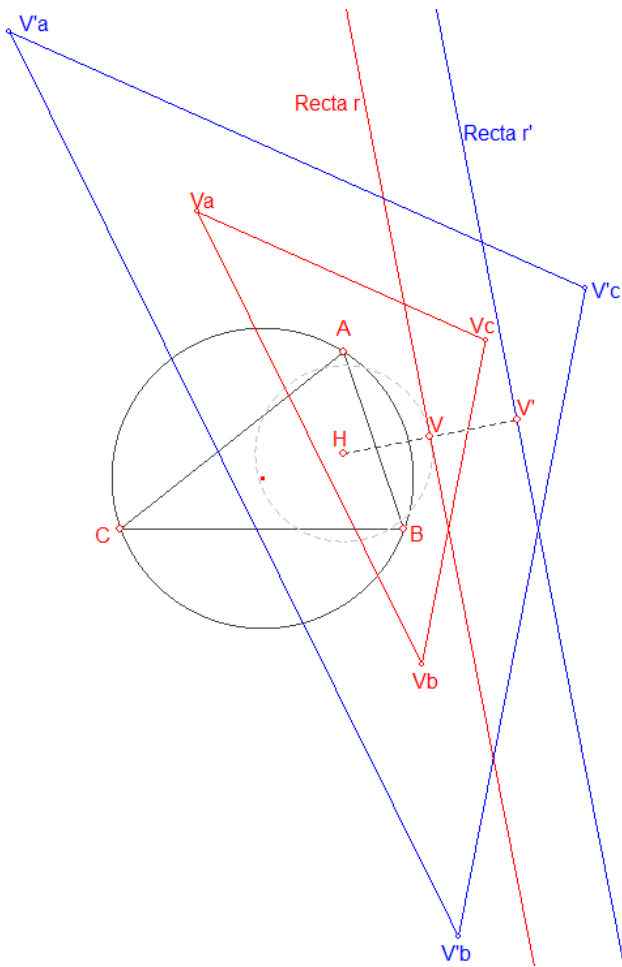
i) Sean r_a , r_b y r_c las simétricas de r respecto a los lados a , b y c . Demostrar que los triángulos que forman r_a , r_b y r_c de vértices V_a , V_b y V_c son congruentes, cualquiera que sea V de Ω .

Sol:

Sea V' el punto homotético de H respecto de V y de razón k . Si trasladamos paralelamente la recta r hasta V' , obtenemos la recta r' . Por tanto, los triángulos $V_a V_b V_c$ y $V'_a V'_b V'_c$ son semejantes con la razón de semejanza k . Por tanto, los triángulos que forman $V_a V_b V_c$ y $V'_a V'_b V'_c$ serían aparte de semejantes (**Problema 722**), también congruentes.

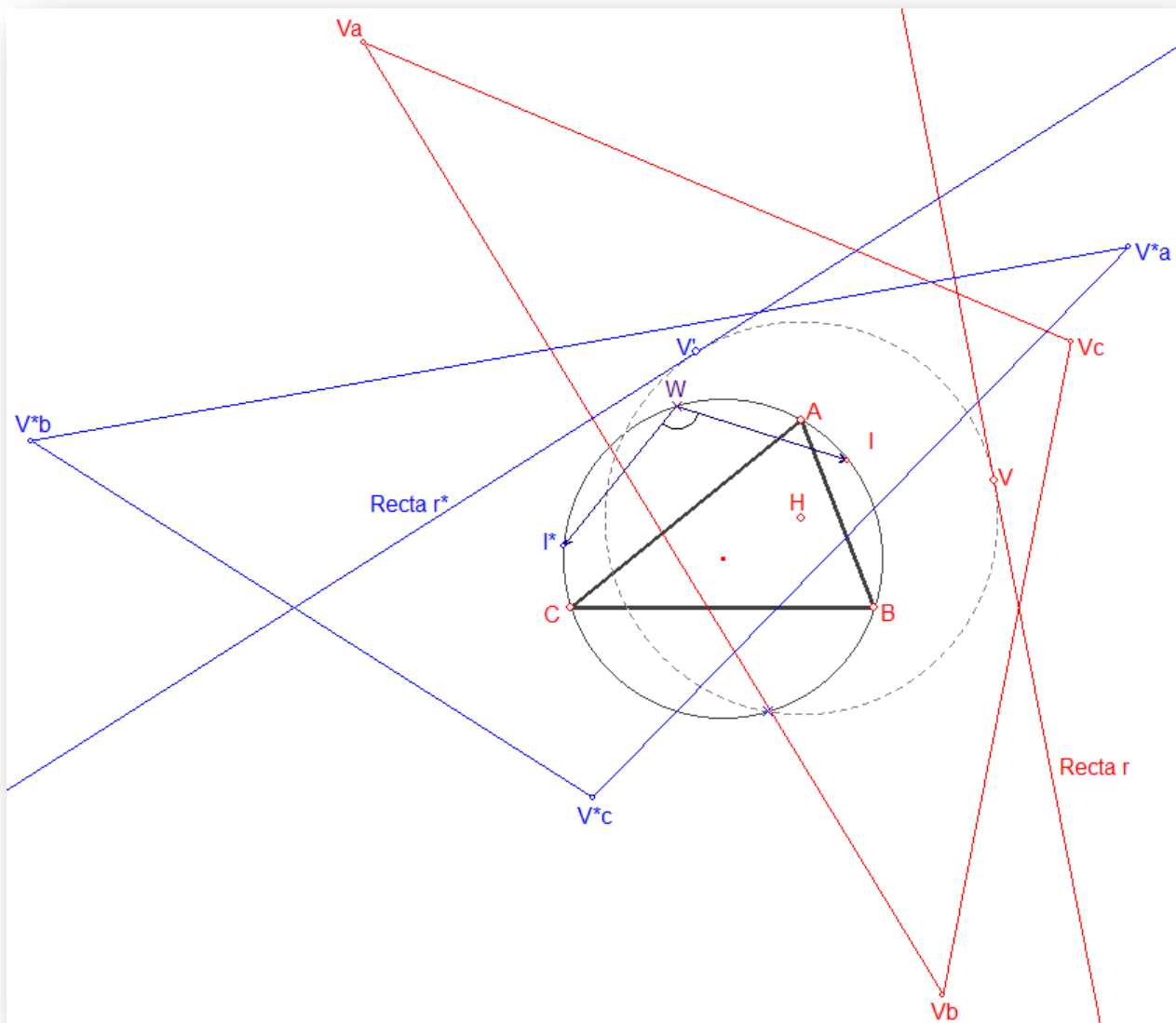
Para ver esto, bastaría tener en cuenta que si dos rectas paralelas r y s , que distan k y k' unidades del ortocentro H , sus respectivos triángulos asociados serían semejantes con razón $R = \frac{k'}{k}$. Y se mantiene esta relación siempre que el punto V recorra la circunferencia de centro H y de radio cualquier valor dado.

Por tanto y por reducción al absurdo, se probaría que de tener dos triángulos $V_a V_b V_c$ y $V'_a V'_b V'_c$ semejantes y no congruentes, podríamos construir un tercero a distinta distancia de H y sin embargo congruente con alguno de los primeros y que distan de H distintas distancias (Absurdo)

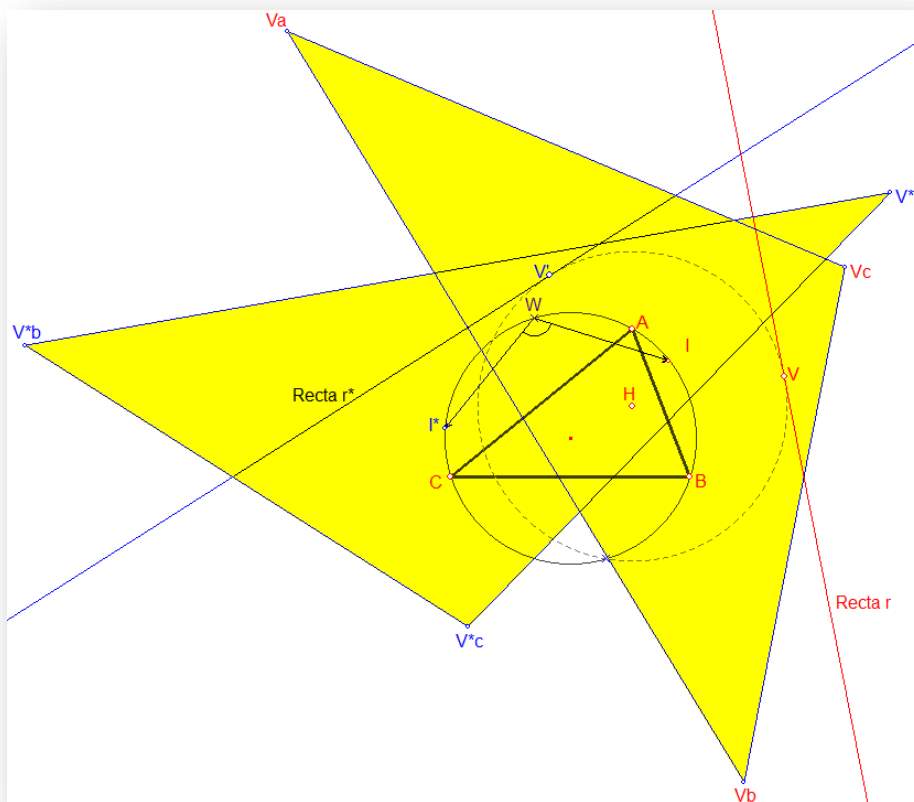
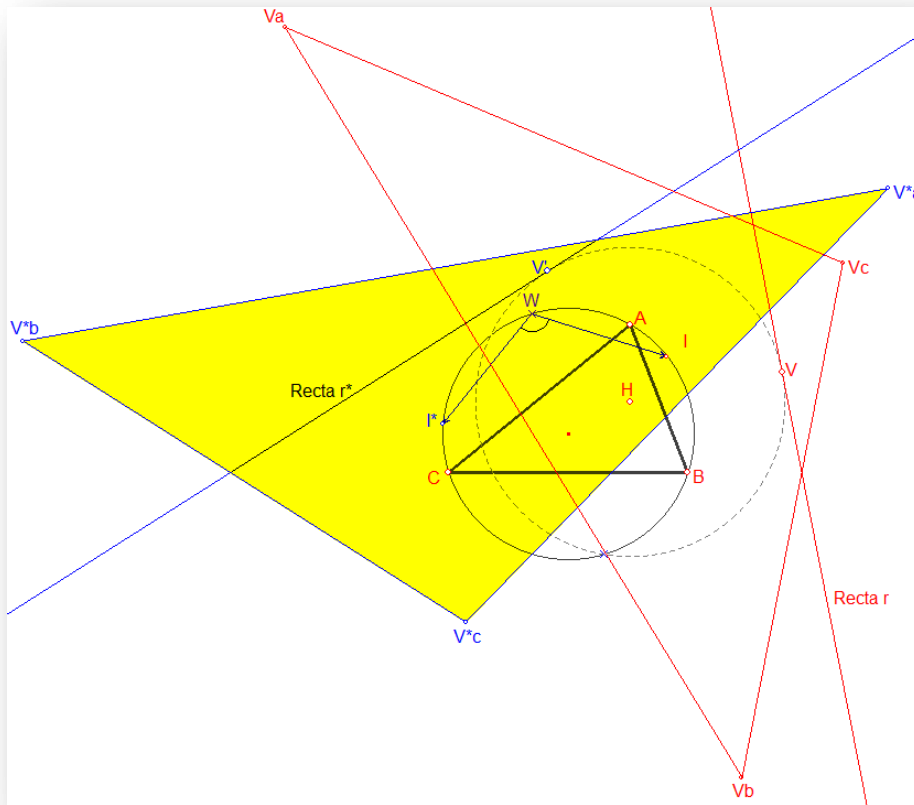


ii) Sean dos triángulos V_a, V_b y V_c , V^*_a, V^*_b y V^*_c formados de esta manera a partir de V y V^* , puntos de Ω . Demostrar que son transformados por un giro de ángulo $\angle VHV^*$ y cuyo centro es un punto W de la circunscrita a ABC .

Por el Lema 2, tenemos que los incentros I, I^* correspondientes a los triángulos asociados a V y V^* pertenecen a la circunferencia circunscrita ABC . Como ambos puntos, son imagen uno de otro por un giro, su centro estará en la mediatriz del segmento II^* y también pertenecerá a la circunferencia circunscrita pues en el paso al límite cuando V se acerca a V^* por la circunferencia Ω , los puntos I y I^* se acercan uno a otro por la circunferencia circunscrita ABC . Se justificará así que el ángulo $\angle IWI^* = \angle VHV^*$



Veamos en las siguientes imágenes el resultado del giro realizado.



Demostrar que W_1 es diametralmente opuesto a W .

Esta última recta, por los apartados anteriores, determina un triángulo congruente con las dos iniciales. Sea el incentro W_1 de este triángulo $WaWbWc$ que estará situado, por supuesto, en un punto de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC (apartado anterior).

La recta V_a-A pasa por el incentro I del triángulo $V_a-V_b-V_c$.

La recta $Wa-A$ pasa por el incentro W_1 del triángulo $Wa-Wb-Wc$.

Que este punto W_1 coincida con el punto de concurrencia de las simétricas de la recta s_1 está justificado por el apartado inicial, ya que este sería el punto incentro del triángulo en su posición límite, cuando la circunferencia de centro H se reduce al propio punto H .

