

Problema 723.- Dado un triángulo ABC , con ortocentro H , consideremos una recta r que sea tangente en V a una determinada circunferencia Ω de centro H .

A) Sean r_a, r_b y r_c las simétricas de r respecto a a, b y c . Demostrar que los triángulos que forman r_a, r_b y r_c, V_a, V_b y V_c son congruentes, cualquiera que sea V de Ω .

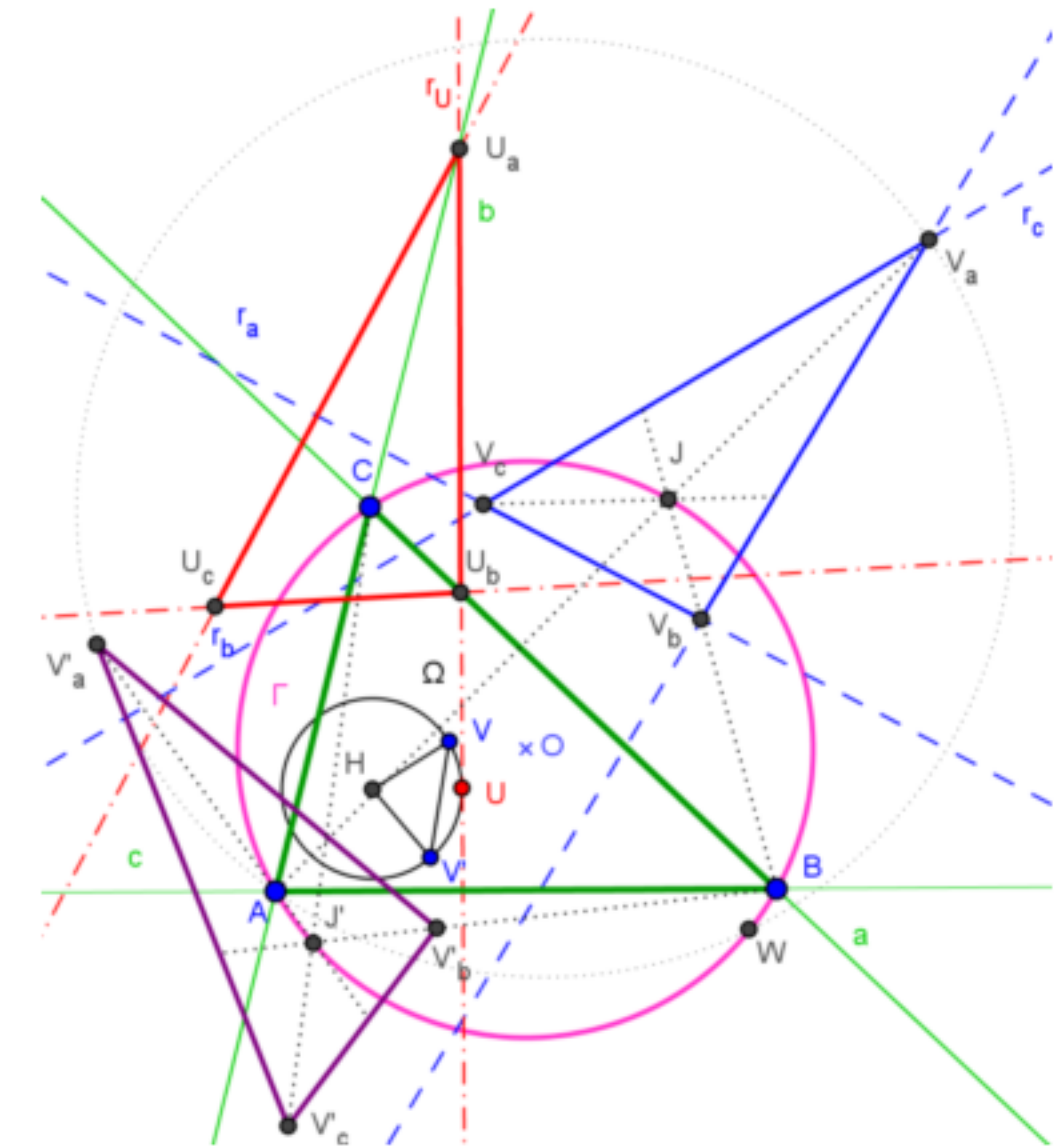
B) Sean dos triángulos V_a, V_b y V_c, V'_a, V'_b y V'_c formados de esta manera a partir de V y V' , puntos de Ω . Demostrar que son transformados por un giro de ángulo $\sphericalangle VHV'$ y cuyo centro es un punto W de la circunscrita a ABC .

C) Sea s la recta que contiene a VV' y sea s_1 la recta paralela a s por H . Las simétricas de s_1 por a, b y c se cortan en un punto W_1 de la circunferencia circunscrita (problema 720 de esta revista).

Demostrar que W_1 es diametralmente opuesto a W .

Barroso, R. (2014): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



A) Si se tienen dos puntos distintos V y V' sobre Ω , los triángulos que se forman, de los que ya sabemos por el problema 722 que son semejantes, son también congruentes, pues para pasar de la tangente en V a la tangente en V' sólo se necesita efectuar un giro, que es una transformación isométrica.

Aprovechando esa propiedad, vamos a calcular ahora, en función del radio r_Ω de la circunferencia Ω , la longitud de los lados del triángulo asociado a un punto cualquiera de Ω .

Tomamos U sobre Ω tal que el segmento HU sea paralelo a uno de los lados del triángulo. La recta r_U es perpendicular a ese lado y al ser su propia simétrica respecto de él contendrá dos de los vértices del triángulo T_U . Es inmediato ver que el incentro de T_U es el vértice C . Así pues en el triángulo U_aCU_b los ángulos respectivos son $90 - \alpha, 180 - \gamma$ y $90 - \beta$.

La altura desde C es $r_\Omega = CU_b \cdot \cos \beta$. Del teorema de los senos obtenemos $U_aU_b = \frac{CU_b \cdot \text{sen } \gamma}{\cos \alpha}$. De ambas resulta

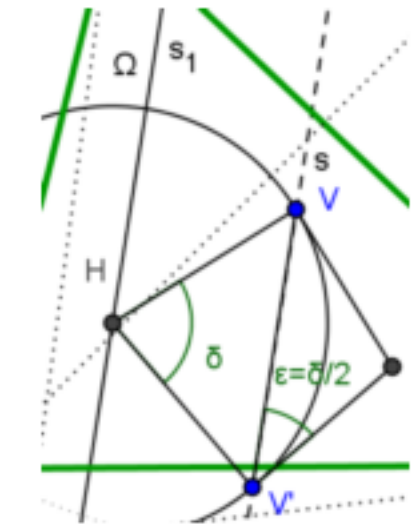
finalmente $U_aU_b = \frac{r_\Omega \cdot \text{sen } \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$, que sólo depende del radio de Ω y de los ángulos del triángulo, pero no de la posición del punto U .

Del ese cálculo se concluye que cuando r_Ω es cero, el triángulo asociado se reduce a un punto: el incentro.

Esto es una generalización del problema 720: cuando el radio es cero, la recta contiene al ortocentro y sus simétricas definen un triángulo reducido a un punto sobre la circunscrita. También es claro que para rectas paralelas diferentes los triángulos engendrados por las simetrías son todos ellos de lados paralelos y con el mismo incentro.

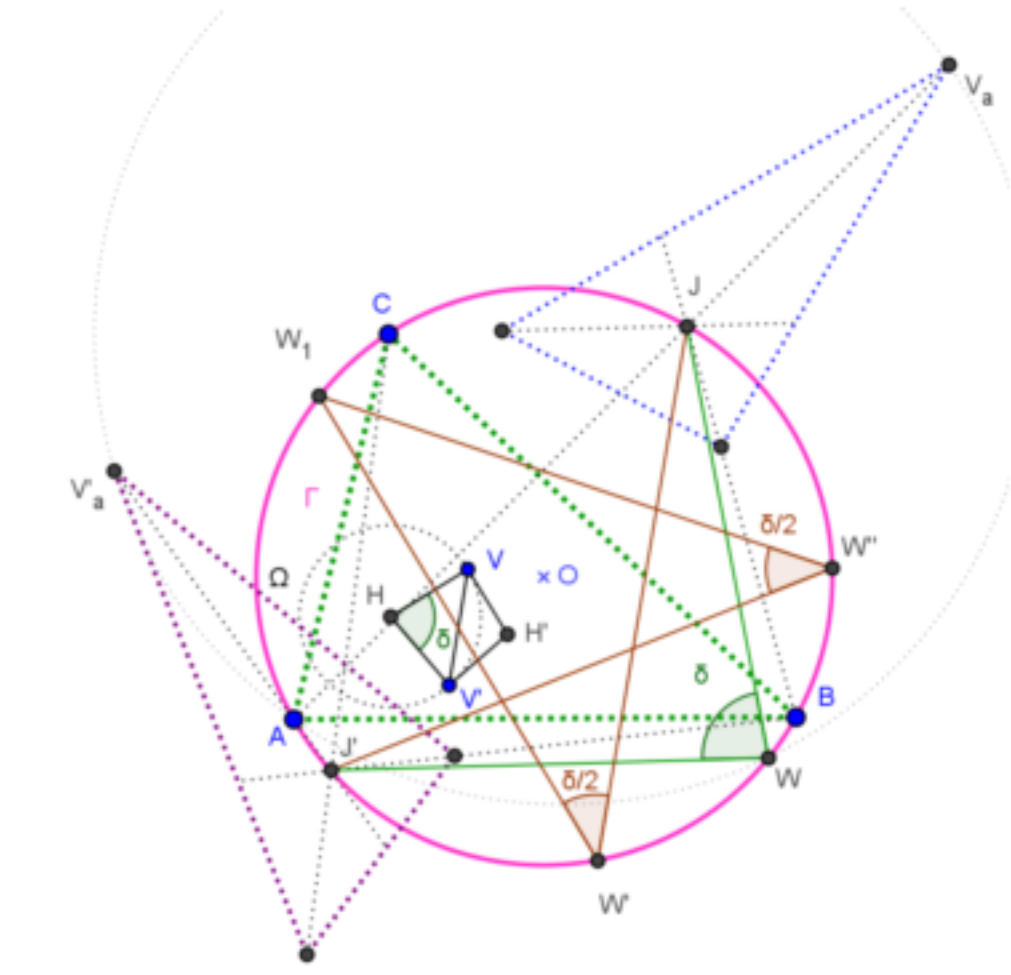
B) Es evidente que el ángulo del giro ha de ser ése, ahora vamos a ver cómo encontrar el centro de semejanza.

Si en una semejanza el segmento MN se transforma en $M'N'$ y la intersección de los mismos (o de sus prolongaciones) es el punto L , el centro de semejanza queda definido por el punto común (distinto de L) a las circunferencias que pasan por $MM'L$ y $NN'L$.



Sean J y J' los incentros de los triángulos T_V y $T_{V'}$. El segmento JV_a se ha de transformar en el $J'V'_a$. Estos segmentos concurren en A , por tanto, el centro de semejanza ha de estar en la circunferencia que contiene al par de homólogos J y J' y al punto de intersección A , luego ya tenemos que el centro de semejanza está en Γ (circunferencia circunscrita a ABC). Es uno de los extremos del diámetro perpendicular a JJ' .

C) La recta s forma con las tangentes en V y V' un ángulo igual a la mitad del ángulo del giro δ , que transforma el triángulo T en T' .



El triángulo asociado a s tiene incentro W_1 . El centro de giro W' que transforma el triángulo T_V en el triángulo T_s es tal que el ángulo $\sphericalangle JW'W_1 = \delta/2$. El centro de giro W'' que transforma T_s en $T_{V'}$, también verifica que $\sphericalangle J'W''W_1 = \delta/2$. Además $\sphericalangle JWJ' = \delta$. Esta situación sólo es posible si el punto W_1 es uno de los que divide el arco JJ' en dos partes iguales, esto es, el punto W_1 en que degenera el triángulo asociado a s_1 , incentro del triángulo asociado a la recta s , es el diametralmente opuesto a W , como pretendíamos demostrar.

■