
Pr. Cabri 724
por César Beade Franco

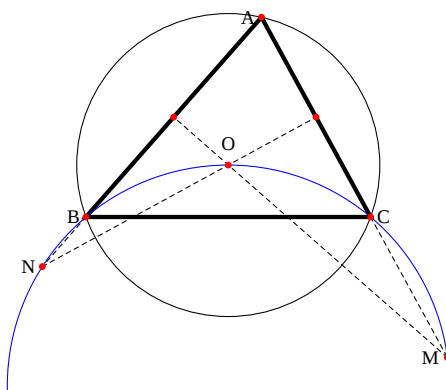
■ **Enunciado**

Dado que en un triángulo ABC, la mediatriz de AB interseca la recta AC en M y la de AC interseca la recta AB en N, los cuatro puntos B C M N y el circuncentro O del triángulo son concíclicos (circunferencia de Mannheim).

■ **Solución**

Una adecuada elección del sistema de referencia proporciona una solución analítica.

Dibujo 1



Suponemos que los vértices del triángulo están sobre la circunferencia de centro $O=(0,0)$ y radio 1, es decir, con ecuaciones paramétricas $(\cos t, \sin t)$, donde el ángulo t se mide a partir de $(1,0)$ en sentido antihorario. Suponemos además que BC es una cuerda horizontal.

En estas condiciones $A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B = (\cos (\pi-\beta), \sin (\pi-\beta))$, $C = (\cos \beta, \sin \beta)$ y circuncentro O.

Resulta que $M = \left(\frac{1}{2} (\csc [\beta] \cos [\alpha - \beta]), \cos \left[\frac{\alpha - \beta}{2} \right]^2 \csc [\beta] \right)$ y $N = \left(\frac{1}{2} \csc [\beta] \sin [\alpha + \beta], \csc [\beta] \sin \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \right]^2 \right)$.

Si calculamos la circunferencia circunscrita a O, B y C vemos que coincide con la circunscrita a O, M y N. Y resulta ser de centro $\left(0, \frac{\csc [\beta]}{2} \right)$ y radio $\left| \frac{\csc [\beta]}{2} \right|$.

Y resulta que $-\beta$ es el complementario del ángulo A. O sea que si R es el radio de la circunscrita, el radio de ésta es $\left| \frac{R}{2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - A \right)} \right|$

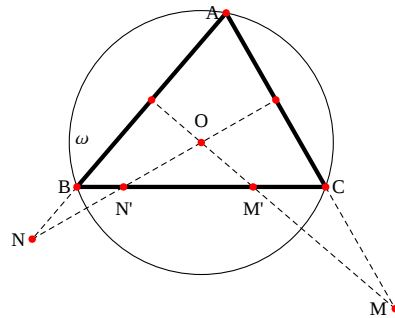
Otra forma de demostrar la conciclidad de estos 5 puntos sería probar que los inversos de M y N respecto a la circunferencia ω circunscrita al triángulo, están sobre la recta BC ya que la inversa de la circunferencia BOC respecto a ω es precisamente esta recta.

Tomemos como vértices del triángulo $A(a,b)$, $B(0,0)$ y $C(1,0)$. Las coordenadas de M y N son $M(\frac{a(-1+a^2+b^2)}{2(-a+a^2+b^2)}, \frac{b(-1+a^2+b^2)}{2(-a+a^2+b^2)})$ y $N(\frac{-a^2+a^3+b^2+ab^2}{2(-a+a^2+b^2)}, \frac{b(-2a+a^2+b^2)}{2(-a+a^2+b^2)})$ y el circuncírculo

tiene centro $O(\frac{1}{2}, \frac{-a+a^2+b^2}{2b})$ y radio $R = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{(-a+a^2+b^2)^2}{b^2}}$.

Los inversos de M y N son, respectivamente, $M'(\frac{-1+a^2+b^2}{2(-1+a)}, 0)$ y $N'(\frac{a^2+b^2}{2a}, 0)$. vemos que están sobre el eje de abscisas, es decir la recta BC.

Dibujo 2

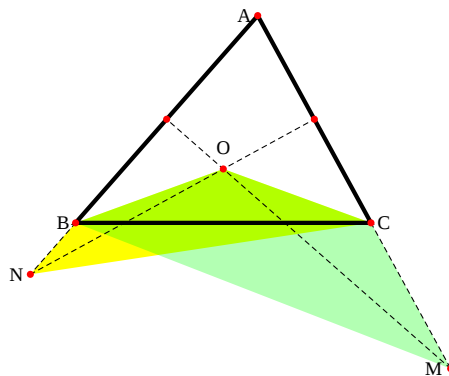


Veamos ahora una demostración sintética a partir del dibujo 1 y 3.

El triángulo ANC es isósceles con ángulos iguales en A y C, lo que significa que el ángulo en N mide $\pi - 2A$. Como el ángulo $BOC = 2A$, se deduce que el cuadrilátero NBOC es cíclico.

Análogamente, AMB es isósceles con ángulos iguales en A y B, de lo que deducimos que el ángulo en M mide también $\pi - 2A$. Así que el otro cuadrilátero MCOB también es cíclico. Por tanto N, B, O, C y M están en la misma circunferencia. el próximo dibujo lo aclara más.

Dibujo 3



Si cambia el triángulo la demostración anterior requiere alguna modificación al variar la posición de M y N como se observa en el dibujo 4. Por ejemplo, en el triángulo izquierdo es fácil comprobar que $\angle BNO = \frac{\pi}{2} + A$ y que $\angle OMB = \frac{\pi}{2} - A$, lo que implica la conciclicidad de BNOM. También es concíclico CMON al ser $\angle CMO = \frac{\pi}{2} + A$ y que $\angle ONC = \frac{\pi}{2} - A$.

Dibujo 4

