Problema 724.-

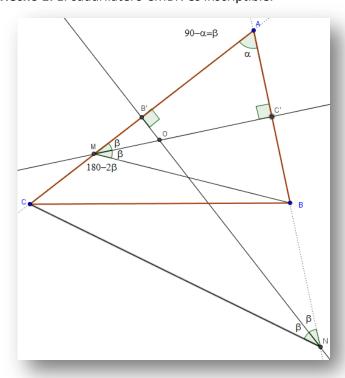
Circunferencia de Mannhiem.

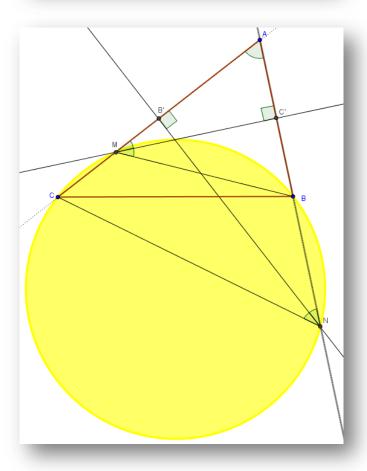
Dado que en un triángulo ABC, la mediatriz de AB interseca la recta AC en M y la de AC interseca la recta AB en N, los cuatro puntos B C M N y el circuncentro O del triángulo son concíclicos.

Instituto de Ciencias y Humanidades (2005): Geometría, una visión de la planimetría. Lumbreras Lima Perú. (p. 501)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Observamos en la configuración realizada, los siguientes hechos de interés. **Hecho 1:** El cuadrilátero CMBN es inscriptible.

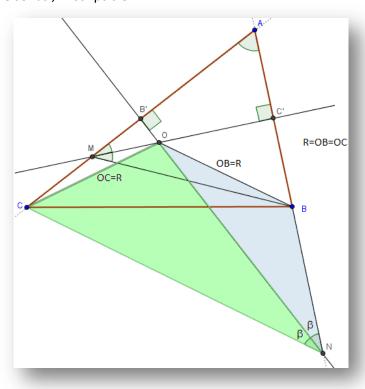


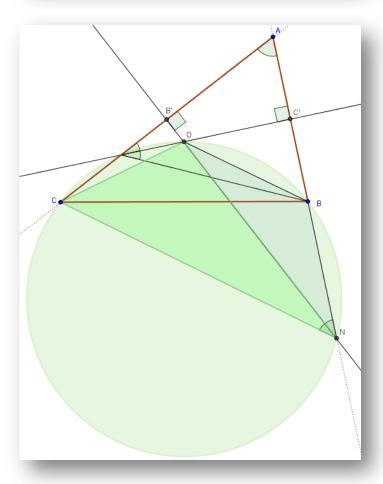


Hecho 2: El cuadrilátero NBOC es inscriptible.

Observando los triángulos ONB y ONC contemplamos que tienen iguales dos lados, OB=OC y ON y un ángulo, $\angle ONC = \angle ONB = \beta$. Ahora bien el lado NC y NB no pueden ser iguales ya que si así fuera, el punto N estaría en la mediatriz del lado BC, hecho absurdo ya que N está en la recta AB.

Por tanto, los ángulos en C y en B deben ser suplementarios. Esto último se traduce en que el cuadrilátero NBOC ha de ser así, inscriptible.





Hecho 3: El cuadrilátero MOBC es inscriptible.

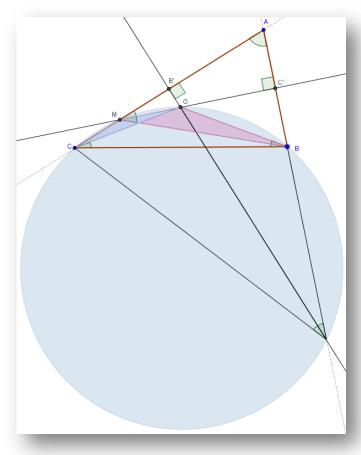
Observando los triángulos OMC y OMB contemplamos que tienen iguales dos lados, $OM \ y \ OB = OC$ y veamos que también el ángulo $\angle MCO = \angle MBO$.

Veamos con mayor detalle esto último.

Por un lado,
$$\angle MCO = \angle C - \angle OCB = \angle C - (90^{\circ} - \angle A) = \angle A + \angle C - 90^{\circ} = 90^{\circ} - \angle B$$
.
Por otro lado, $\angle MBC + \angle C = 180^{\circ} - 2\angle A = \angle B + \angle C - \angle A \rightarrow \angle MBC = \angle B - \angle A$

$$\angle MBO = \angle OBC - \angle MBC \rightarrow \angle MBO = (90^{\circ} - \angle A) - \angle MBC = 90^{\circ} - \angle B$$
.

En definitiva, $\angle MCO = \angle MBO$. Por tanto, el cuadrilátero MOBC es inscriptible.



Hecho 4: De los tres hechos anteriores,

CMBN es inscriptible (Hecho 1)

NBOC es inscriptible (Hecho 2) MOBC es inscriptible (Hecho 3)

Los cinco puntos *C*, *M*, *N*, *B*, *O son* concíclicos.

cqd