

Problema 724

Donat el triangle $\triangle ABC$, la mediatriu del costat $\overline{AB}$ intersecta la recta AC en M i la mediatriu del costat $\overline{AC}$ intersecta la recta AB en el punt N.

Els punts B, C, M, N i el circumcentre O són cíclics, la circumferència a la qual pertanyen s'anomena Circumferència de Mannheim.

Solució de Ricard Peiró:

Considerem la disposició dels 5 punts com en la figura.

Siga D el punt mig del costat $\overline{AC}$

Per ser O el circumcentre i A inscrit en la circumferència circumscriu $\angle BOC = 2A$.

M pertany a la mediatriu al costat $\overline{AB}$, aleshores: $\overline{AM} = \overline{BM}$, per tant, $\angle ABM = A$.

$$\angle MBC = B - A.$$

$$\angle BMC = 180^\circ - (B - A + C) = 2A.$$

Aleshores, M pertany a la circumferència circumscriu als punts O, B, C.

$$\angle CBN = 180^\circ - B.$$

N pertany a la mediatriu al costat $\overline{AC}$, aleshores, $\overline{AN} = \overline{CN}$, per tant, $\angle NCA = A$.

$$\angle NCB = A - C.$$

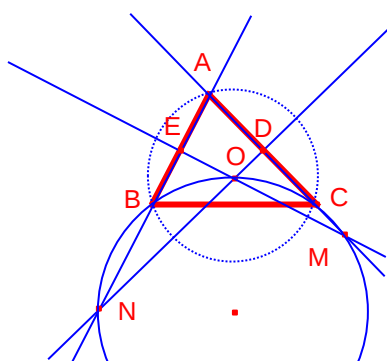
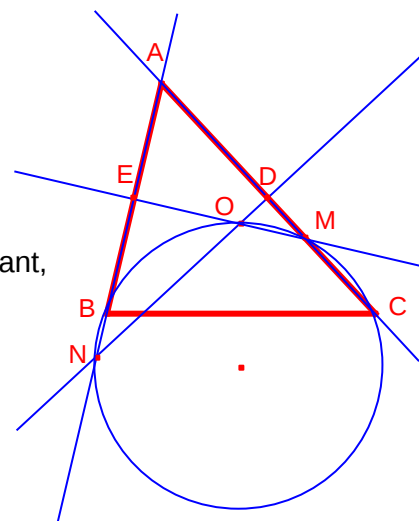
$$\angle BNC = 180^\circ - (180^\circ - B + A - C) = 180^\circ - 2A$$

Aleshores, N pertany a la circumferència circumscriu als punts O, B, C.

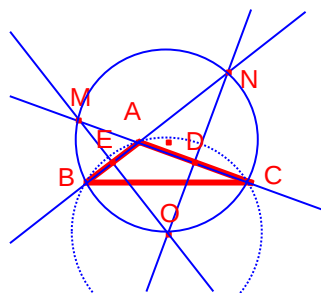
Aleshores, els 5 punts són cíclics.

Qualsevol altra disposició dels punts B, C, M, N, O compleixen la propietat.

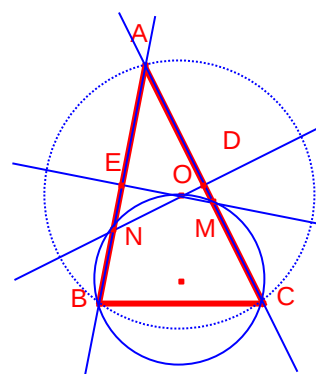
La demostració seria anàloga.



$$\angle BMC = \angle BNC = 180^\circ - \angle BOC$$



$$\angle BMC = \angle BNC = 180^\circ - \angle BOC.$$



$$\angle BMC = \angle BNC = \angle BOC$$