

Problema 724

Dada el triángulo $\triangle ABC$, la mediatriz del lado $\overline{AB}$ intersecta la recta AC en M y la mediatriz del lado $\overline{AC}$ intersecta la recta AB en el punto N . Los puntos B, C, M, N y el circuncentro O son cíclicos, la circunferencia a la cual pertenecen se llama Circunferencia de Mannheim.

Solución de Ricard Peiró:

Consideremos la disposición de los 5 puntos como en la figura.

Sea D el punto medio del lado $\overline{AC}$

Por ser O el circuncentro y A inscrito en la circunferencia circunscrita $\angle BOC = 2A$.

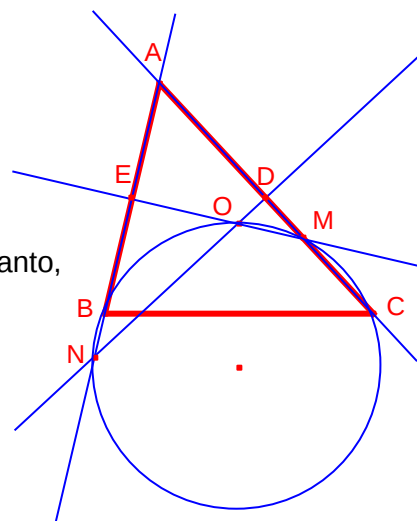
M pertenece a la mediatriz al lado $\overline{AB}$, entonces: $\overline{AM} = \overline{BM}$, por tanto, $\angle ABM = A$.

$$\angle MBC = B - A.$$

$$\angle BMC = 180^\circ - (B - A + C) = 2A.$$

Entonces, M pertenece a la circunferencia circunscrita a los puntos O, B, C .

$$\angle CBN = 180^\circ - B.$$



N pertenece a la mediatriz al lado $\overline{AC}$, entonces, $\overline{AN} = \overline{CN}$, por tanto, $\angle NCA = A$.

$$\angle NCB = A - C.$$

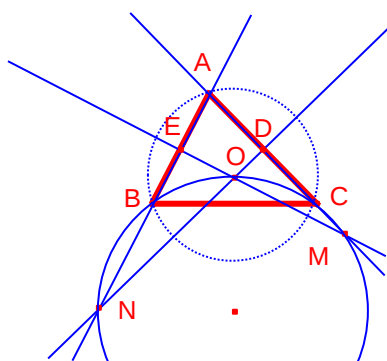
$$\angle BNC = 180^\circ - (180^\circ - B + A - C) = 180^\circ - 2A$$

Entonces, N pertenece a la circunferencia circunscrita a los puntos O, B, C .

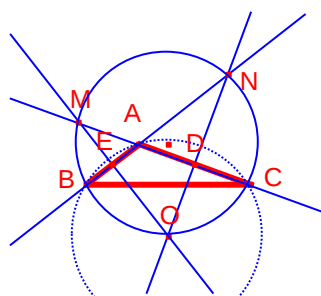
Entonces, los 5 puntos son cíclicos

Cualquiera otra disposición de los puntos B, C, M, N, O cumplen la propiedad.

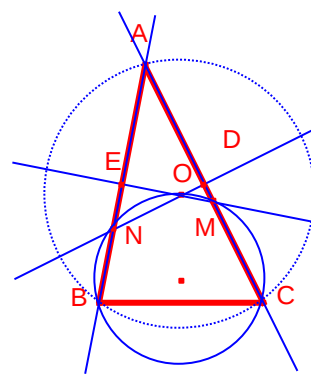
La demostración sería análoga.



$$\angle BMC = \angle BNC = 180^\circ - \angle BOC$$



$$\angle BMC = \angle BNC = 180^\circ - \angle BOC.$$



$$\angle BMC = \angle BNC = \angle BOC$$