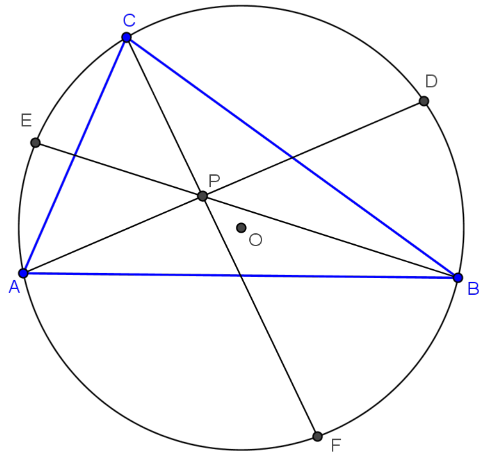
Solución al Problema 725
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 1 al 15 de Diciembre de 2014

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Octubre 20, 2014

Problema 725.
1119
Sea ABC un triángulo inscrito en un círculo y sea P el baricentro. Extendemos AP, BP y CP hasta encontrar el círculo en los puntos D, E y F. Demostrar que $AP/PD + BP/PE + CP/PF = 3$.
KR Sastry. Addis Ababa Etiopía . Mathematics Magazine. (1982) Vol 55. May, pag 181

Solución 725. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas y siendo $P(1:1:1)$, los puntos D, E y F son

$$D\left(\frac{-a^2}{b^2+c^2}:1:1\right), \qquad E\left(1:\frac{-b^2}{a^2+c^2}:1\right), \qquad F\left(1:1:\frac{-c^2}{a^2+b^2}\right)$$

Ahora utilizando la fórmula que da la distancia entre dos puntos expresados en coordenadas baricéntricas homogéneas y simplificando se tiene que

$$AP^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{9} = \frac{4S_A+a^2}{9}$$
$$BP^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{9} = \frac{4S_B+b^2}{9}$$
$$CP^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{9} = \frac{4S_C+c^2}{9}$$
$$PD^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{9(4S_A+a^2)}$$
$$PE^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{9(4S_B+b^2)}$$
$$PF^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{9(4S_C+c^2)}$$

por tanto

$$\frac{AP}{PD} = \frac{4S_A+a^2}{a^2+b^2+c^2}, \qquad \frac{BP}{PE} = \frac{4S_B+b^2}{a^2+b^2+c^2}, \qquad \frac{CP}{PF} = \frac{4S_C+c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

por fin

$$\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF} = \frac{(2b^2+2c^2-a^2)+(2a^2+2c^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)}{a^2+b^2+c^2} = 3 \quad q.e.d.$$