Problema 725
1119

Sea ABC un triángulo inscrito en un círculo y sea P el baricentro. Extendemos AP BP y CP hasta encontrar el círculo en los puntos D E y F .

Demostrar que

AP/PD + BP/PE + CP/PF =3.

Mathematics Magazine. (1982) Vol 55. May, pag 181

KR Sastry. Addis Ababa Etiopía

Sea A' el punto medio de BC, es AA'=$m_{a,}$ y sea A'D=d.

Es por la potencia de A', dm_a=a/2 a/2, luego $d = \frac{a^2}{4m_a}$

Así, es: $AP = \frac{2m_a}{3}$, $PD = \frac{m_a}{3} + \frac{a^2}{4\,m_a}$

Haciendo operaciones tenemos:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{8m_a^2}{4m_a^2 + 3a^2}$$

Teniendo en cuenta el valor del cuadrado de la mediana,

8m<?> lsub{a} lsup{2}

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Queda:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{4b^2 + 4c^2 - 2a^2}{2b^2 + 2c^2 + 2a^2}$$

Así por la circularidad de los valores, se tiene lo pedido:
AP/PD + BP/PE + CP/PF =3.

Ricardo Barroso Campos
Jubilado
Sevilla