

Problema 725

Sea un triángulo $\triangle ABC$ inscrito en una circunferencia y sea P el baricentro. Las rectas AP, BP y CP cortan el círculo en los puntos D, E, F.

Demostrar que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{PF}} = 3$.

Solución de Ricard Peiró:

Sean K, L, M los puntos medios de los lados del triángulo $\triangle ABC$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, respectivamente.

Las medianas de un triángulo miden:

$$\overline{AK} = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}, \quad \overline{BL} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2},$$

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}.$$

Aplicando la propiedad del baricentro:

$$\overline{AP} = \frac{2}{3} \overline{AK}, \quad \overline{PK} = \frac{1}{3} \overline{AK}.$$

Aplicando la potencia de K respecto de la circunferencia:

$$\overline{AK} \cdot \overline{DK} = \overline{BK} \cdot \overline{CK} = \frac{1}{4} a^2.$$

$$\overline{DK} = \frac{1}{4} \frac{a^2}{\overline{AK}}.$$

$$\overline{PD} = \overline{PK} + \overline{DK} = \frac{1}{4} \frac{a^2}{\overline{AK}} + \frac{1}{3} \overline{AK} = \frac{3a^2 + 4\overline{AK}^2}{12\overline{AK}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6\overline{AK}}.$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\frac{2}{3} \overline{AK}}{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6\overline{AK}}} = \frac{4\overline{AK}^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\text{Análogamente: } \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} = \frac{4\overline{BL}^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \frac{\overline{CP}}{\overline{PF}} = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} + \frac{\overline{BP}}{\overline{PE}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{PF}} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 3 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 3$$

