

Problema 725

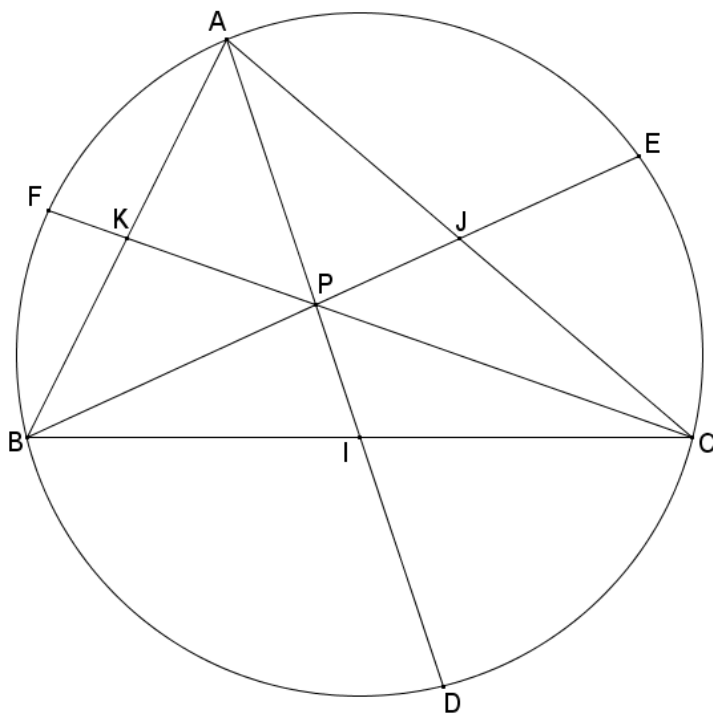
Sea ABC un triángulo inscrito en un círculo y sea P el baricentro. Extendemos AP BP y CP hasta encontrar el círculo en los puntos D E y F .

Demostrar que

$$AP/PD + BP/PE + CP/PF = 3.$$

KR Sastry. Addis Ababa Etiopía . Mathematics Magazine. (1982) Vol 55. May, pag 181

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



P le barycentre du triangle ABC est à l'intersection des médianes AI,BJ et CK.

On désigne par :

- a, b et c les longueurs des côtés BC, CA et AB du triangle ABC,
- m_a, m_b et m_c les longueurs des médianes AI, BJ et CK.

La puissance de I par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC est égale à $IB \cdot IC = ID \cdot ID$.

On en déduit $ID = a^2/4m_a$. D'où $PD = PI + ID = m_a/3 + a^2/4m_a = (3a^2 + 4m_a^2)/12m_a$.

Comme $AP = 2m_a/3$, on obtient la relation $AP/PD = 8m_a^2/(3a^2 + 4m_a^2)$.

Or les longueurs des médianes d'un triangle s'expriment en fonction des côtés selon les formules : $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, $4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$ et $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, ce qui donne :

$$AP/PD = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{puis } BP/PE = (2c^2 + 2a^2 - b^2)/(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{et } CP/PF = (2a^2 + 2b^2 - c^2)/(a^2 + b^2 + c^2)$$

Il en résulte $AP/PD + BP/PE + CP/PF = (3a^2 + 3b^2 + 3c^2)/(a^2 + b^2 + c^2) = 3$. C.q.f.d.