Problema 725

1119

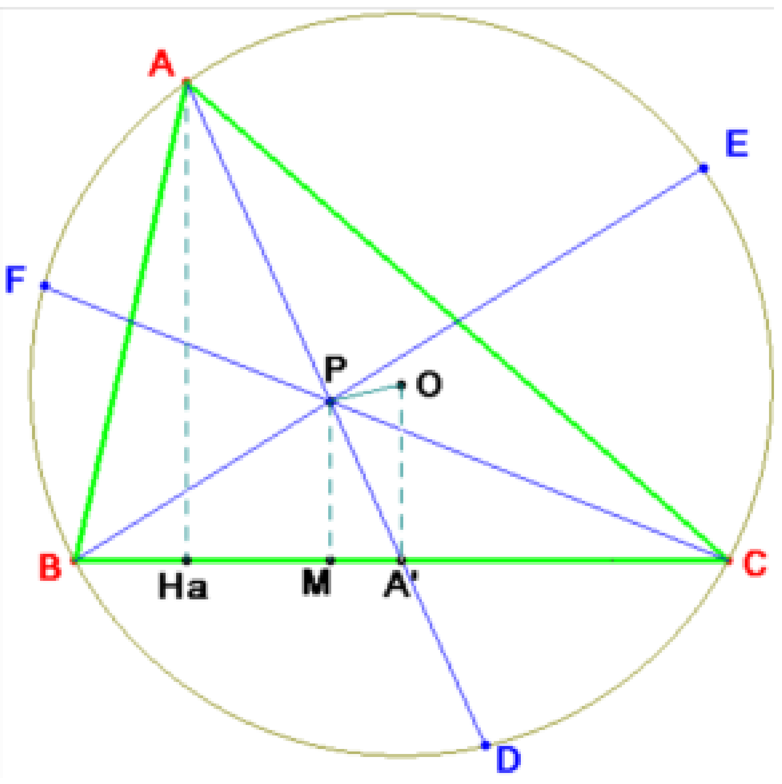
Sea ABC un triángulo inscrito en un círculo y sea P el baricentro. Extendemos AP, BP y CP hasta encontrar el círculo en los puntos D, E y F.

Demostrar que

$$\frac{AP}{PD}+\frac{BP}{PE}+\frac{CP}{PF}=3$$

KR Sastry. Addis Ababa Etiopía. Mathematics Magazine. (1982) Vol 55. May, pág 181.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sean A' es el punto medio de BC, M es la proyección del baricentro sobre él y H_a el pie de la altura desde A. Los triángulos AH_aA' y PMA' son semejantes de razón 3. Por consiguiente $MA'=\frac{1}{3}H_aA', PM=\frac{1}{3}AH_a$ y $PA'=\frac{1}{3}AA'$. $OA'=R\cos A$. Para la altura desde A podemos usar $AH_a = c sen\, B=\frac{bc}{2R}$.

La potencia p del baricentro P respecto de la circunferencia circunscrita de radio R, (prescindiendo del signo) es:

$p = PA\cdot PD = PB\cdot PE = PC\cdot PC = R^2 - OP^2$.

A partir de ahí podemos poner

$\frac{PA}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{PC}{PF}=\frac{PA^2+PB^2+PC^2}{p}=\frac{4}{9p}(m_A^2+m_B^2+m_C^2)$, donde m_X es la longitud de la mediana trazada desde el vértice X.

Salvo p, todo se conoce, $4m_A^2=2(b^2+c^2)-a^2$, $4m_B^2=2(a^2+c^2)-b^2$ y $4m_C^2=2(a^2+b^2)-c^2$. Por tanto, $4(m_A^2+m_B^2+m_C^2)=3(a^2+b^2+c^2)$ y

$$\frac{PA}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{PC}{PF}=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{9p}$$

El problema quedará resuelto si concluimos que $9p=a^2+b^2+c^2$.

OP es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos MA' y $OA'-PM$.

Tenemos: $3MA'=H_aA'=BA'-BH_a=\frac{a}{2}-c\cdot\cos B$; $3(OA'-PM)=3R\cos A-AH_a$

$9MA'^2=\left(\frac{a}{2}-c\cdot\cos B\right)^2=\frac{a^2}{4}-ac\cdot\cos B+c^2\cdot\cos^2 B$

$9(OA'-PM)^2=(3OA'-AH_a)^2=9R^2\cos^2 A-3bc\cos A+c^2\cdot \text{sen}^2 B$.

$9MA'^2+9(OA'-PM)^2=c^2+\frac{a^2}{4}-ac\cdot\cos B-3bc\cos A+9R^2\cos^2 A=c^2+\frac{a^2}{4}-c(a\cos B+3b\cos A)+9R^2\cos^2 A=c^2+\frac{a^2}{4}-c(3c-2a\cos B)+9R^2-9R^2\text{sen}^2 A=9R^2-2c^2+\frac{a^2}{4}-\left(\frac{3a}{2}\right)^2+2ac\cos B=9R^2-2c^2-2a^2+(a^2+c^2-b^2)=9R^2-a^2-b^2-c^2$

Por tanto la potencia del baricentro es:

$p=PA\cdot PD=PB\cdot PE=PC\cdot PC=R^2-OP^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ como pretendíamos demostrar.

Nota.- Es muy fácil calcular p utilizando coordenadas cartesianas. Se toma O como origen y, para más sencillez, $R=1$. Los vértices tienen coordenadas (x_i, y_i). Los cuadrados de las longitudes de los lados son de la forma $(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2=2-2x_ix_j-2y_iy_j$. La suma de todas ellas es $a^2+b^2+c^2=6-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)$.

El baricentro tiene coordenadas $P=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3, y_1+y_2+y_3)$ y el cuadrado de la distancia al circuncentro viene dado por $OP^2=\frac{1}{9}[(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2]=\frac{1}{9}(3+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3))$

de donde se tiene que la potencia del baricentro es

$$p=R^2-OP^2=1-\frac{1}{9}(3+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3))=$$

$\frac{1}{9}(6-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3))$, por tanto $p=R^2-OP^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

Si utilizamos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC, también resulta sencillo el problema. Aquí calcularemos la longitud del segmento PD. Para ello calculamos las coordenadas de D, punto de intersección de la mediana desde A, de ecuación $y=z$ con la circunferencia circunscrita a ABC de ecuación $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$. Los puntos de intersección son, el propio A y $D(-a^2: b^2+c^2: b^2+c^2)=\left(\frac{-a^2}{2(b^2+c^2)-a^2}, \frac{b^2+c^2}{2(b^2+c^2)-a^2}, \frac{b^2+c^2}{2(b^2+c^2)-a^2}\right)$.

El baricentro es el punto $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, por tanto, para el vector $\overrightarrow{DP}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3[2(b^2+c^2)-a^2]}(2,-1,-1)$. EL módulo de este vector es

$\left|\overrightarrow{DP}\right|^2=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3[2(b^2+c^2)-a^2]}\right)^2(2^2S_A+(-1)^2S_B+(-1)^2S_C)=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3[2(b^2+c^2)-a^2]}\right)^2[2(b^2+c^2-a^2)+a^2]=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{9[2(b^2+c^2)-a^2]}=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{9\cdot 4m_A^2}=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6\cdot m_A}\right)^2$, (donde $2\cdot S_A=(b^2+c^2)-a^2$ y análogamente S_B y S_C)

Por tanto $\left|\overrightarrow{DP}\right|=\frac{a^2+b^2+c^2}{6\cdot m_A}$. Por otra parte tenemos $\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{2}{3}\cdot m_A$, de donde resulta

$$\frac{AP}{DP}=\frac{4m_A^2}{a^2+b^2+c^2}$$

y fórmulas análogas para las otras tres fracciones.

La suma de ellas es

$$\frac{PA}{PD}+\frac{PB}{PE}+\frac{PC}{PF}=\frac{4(m_A^2+m_B^2+m_C^2)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=3$$

∎