

Solución al Problema 726 Extra propuesto en Triángulos Cabri quincena del 16 de Diciembre de 2014 al 15 de Enero de 2015

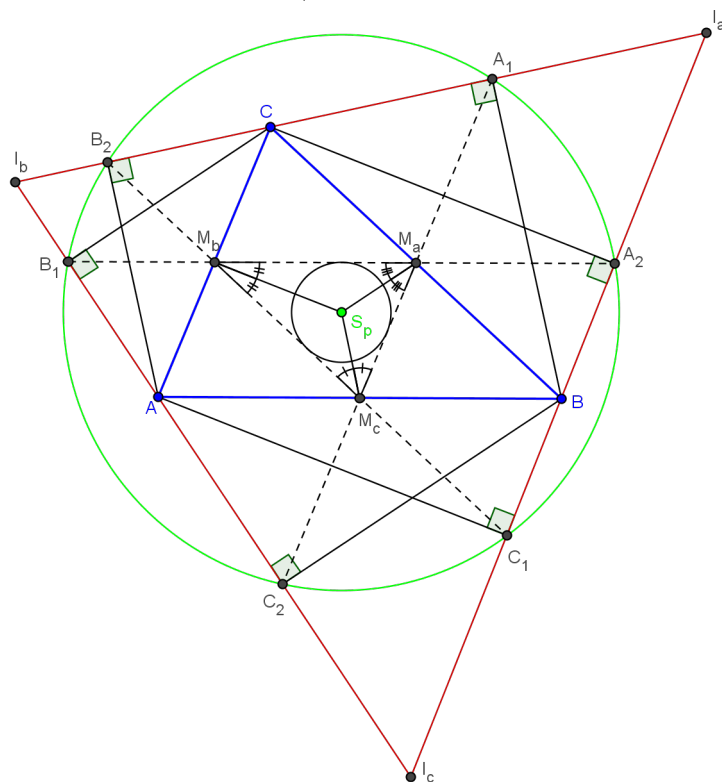
enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Octubre 20, 2014

Problema 726 Extra.

Demostrar que las seis proyecciones ortogonales de los vértices de un triángulo sobre las bisectrices exteriores son concíclicas.
Quadrature (2003) n 48, pag 47. Magazine de mathématiques pures et épicées.

Solución 726 Extra. (Andrea Fanchini, Cantú, Italia)



Usando coordenadas baricéntricas las ecuaciones de las bisectrices exteriores al $\triangle ABC$ en los vértices A , B y C son

$$I_b I_c \equiv cy + bz = 0, \quad I_a I_c \equiv cx + az = 0, \quad I_a I_b \equiv bx + ay = 0$$

donde I_a , I_b y I_c son los centro de las circunferencias exinscritas (exincentros) y forman el triángulo excentral.

Las perpendiculares por B y C a la bisectriz exterior por A son

$$BC_2 \equiv cx + (b + c)z = 0, \quad CB_1 \equiv bx + (b + c)y = 0$$

por tanto los pies C_2 y B_1 son

$$C_2 \equiv I_b I_c \cap BC_2(-b - c : -b : c) \quad B_1 \equiv I_b I_c \cap CB_1(-b - c : b : -c)$$

Las perpendiculares por A y C a la bisectriz exterior por B son

$$AC_1 \equiv cy + (a + c)z = 0, \quad CA_2 \equiv (a + c)x + ay = 0$$

por tanto los pies C_1 y A_2 son

$$C_1 \equiv I_a I_c \cap AC_1(-a : -c - a : c) \quad A_2 \equiv I_a I_c \cap CA_2(a : -c - a : -c)$$

Las perpendiculares por A y B a la bisectriz exterior por C son

$$AB_2 \equiv (a + b)y + bz = 0, \qquad BA_1 \equiv (a + b)x + az = 0$$

por tanto los pies B_2 y A_1 son

$$B_2 \equiv I_a I_b \cap AB_2(-a : b : -a - b) \qquad A_1 \equiv I_a I_b \cap BA_1(a : -b : -a - b)$$

Los seis pies A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 están en la circunferencia de ecuación

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + (s - a)(s - b)(s - c)(x + y + z) \left(\frac{x}{s - a} + \frac{y}{s - b} + \frac{z}{s - c} \right) = 0$$

que es la circunferencia ortogonal a las tres circunferencias exinscritas (circunferencia radical), tiene como centro el punto de Spieker $S_p(b + c : c + a : a + b)$, X_{10} en ETC y radio $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + s^2}$. El punto de Spieker es también el centro de la circunferencia inscrita al triángulo medial de el $\triangle ABC$.