

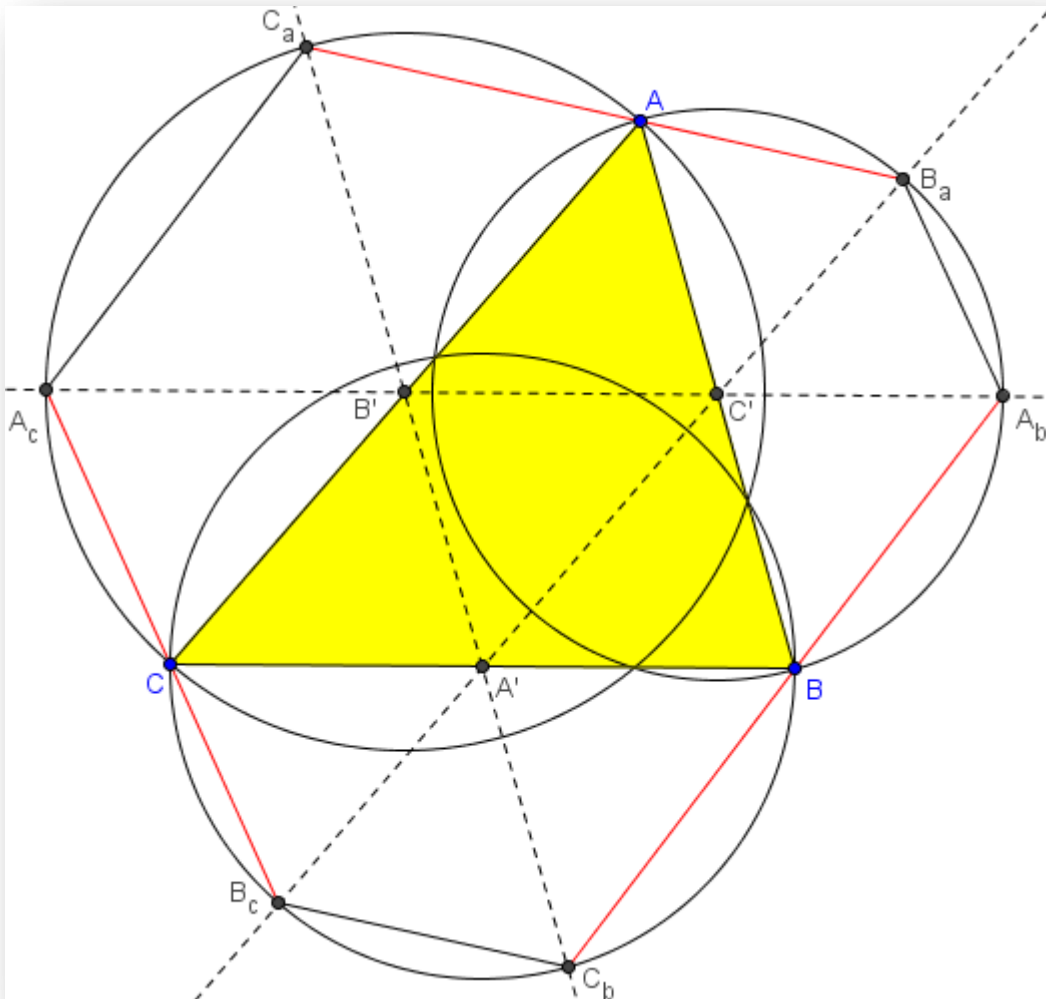
Problema 726.-

Demostrar que las seis proyecciones ortogonales de los vértices de un triángulo sobre las bisectrices exteriores son concíclicas.

Quadrature (2003) nº 48, pág. 47.

Magazine de Mathématiques Pures et Épicées. La Mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



En principio, observamos que los lados del triángulo inicial ABC son los diámetros de las circunferencias donde se encuentran las proyecciones ortogonales de estos puntos, extremos diametrales, sobre las bisectrices exteriores asociadas a dichos vértices, respectivamente.

Veamos en principio, que el cuadrilátero $A_c C_a B_a A_b$ es inscriptible. Para ello, observamos las siguientes figuras:

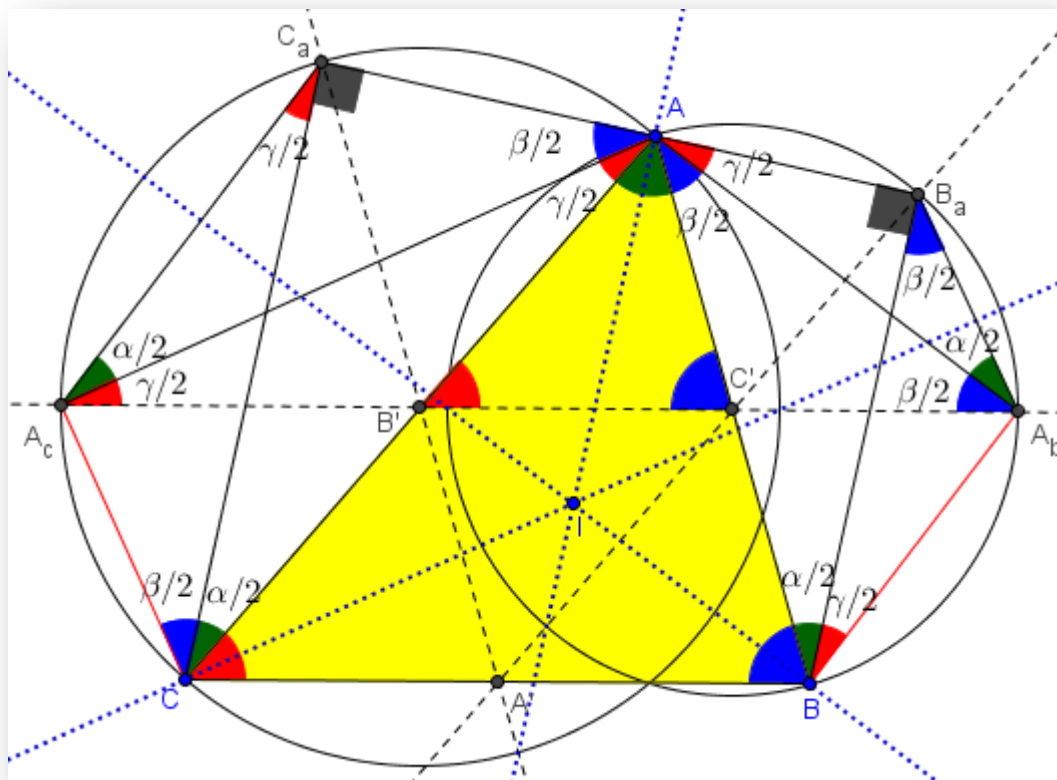


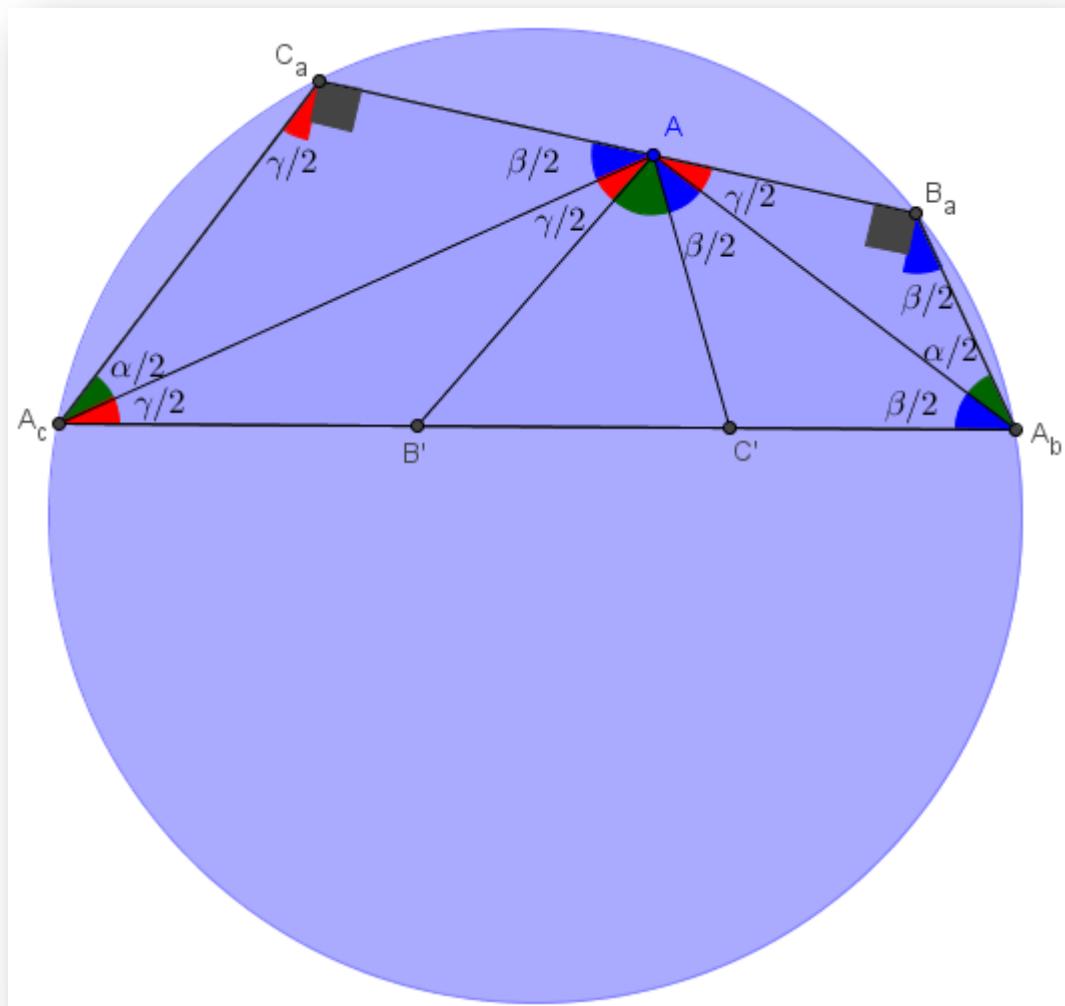
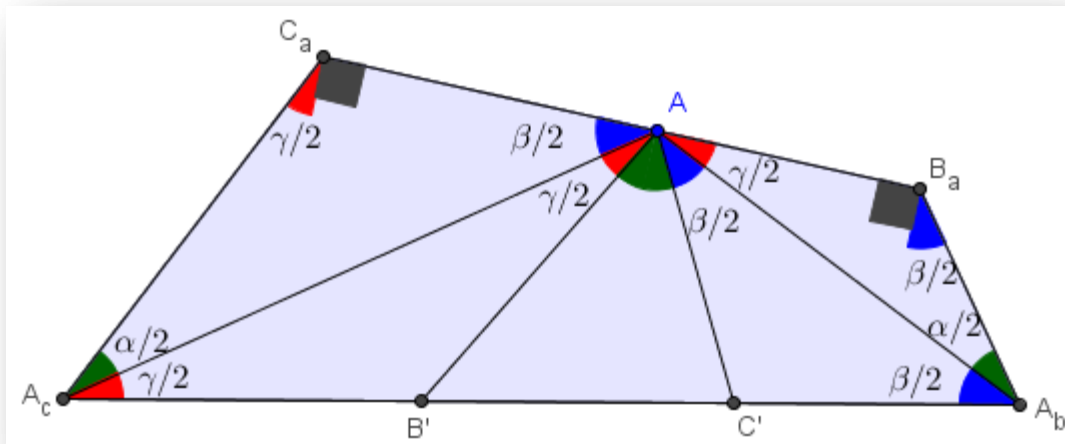
Figura $AB'C'A_bB_a$

1) Alternos-Internos	$\angle ABB_a = \angle BAI = \frac{\alpha}{2}$
2) Ángulos inscritos en la misma circunferencia	$\angle AA_bB_a = \angle ABB_a = \frac{\alpha}{2}$
3) $90^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = \frac{\gamma}{2}$	$\angle B_aBA_b = \frac{\gamma}{2}$
4) Ángulos inscritos en la misma circunferencia	$\angle A_bAB_a = \angle B_aBA_b = \frac{\gamma}{2}$
5) $90^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}) = \frac{\beta}{2}$	$\angle BAA_b = \frac{\beta}{2}$
6) Triángulo isósceles $C'AA_b$	$\angle C'AA_b = \angle C'A_bA = \frac{\beta}{2}$
7) B', C' y A_b están alineados	$\angle AC'B' = \beta = \angle C'AA_b + \angle C'A_bA$

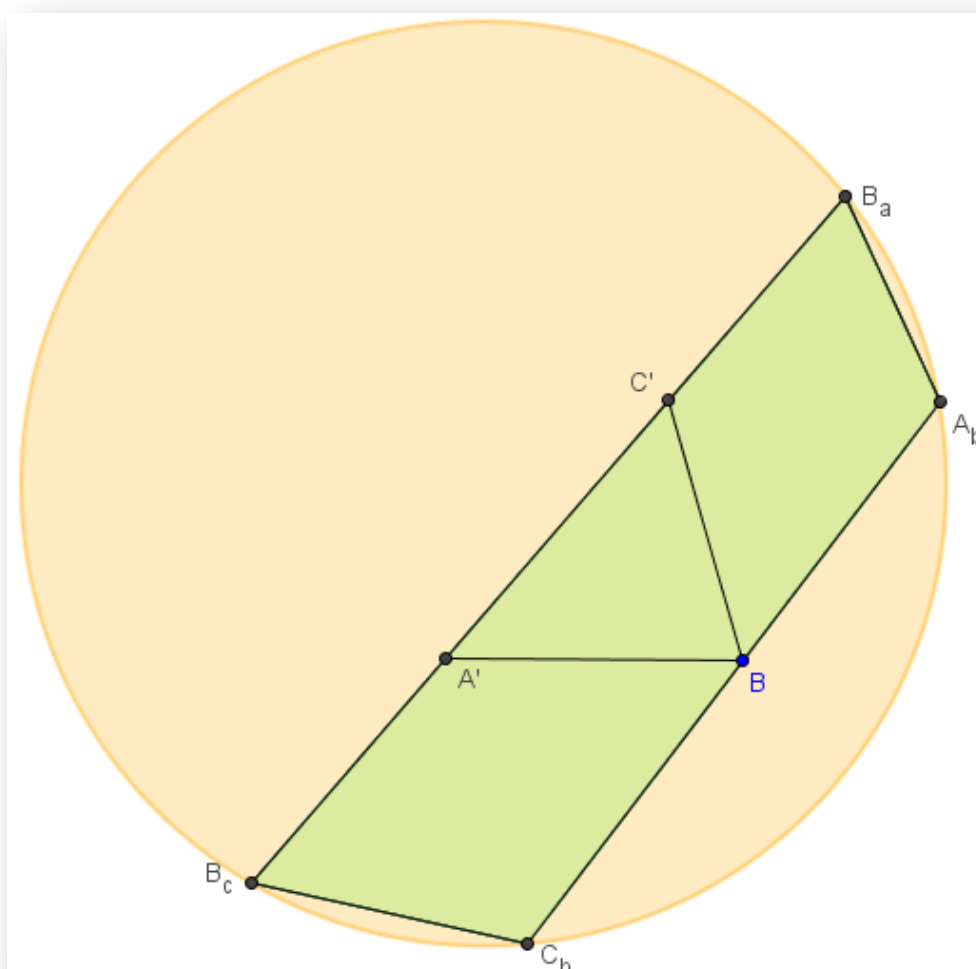
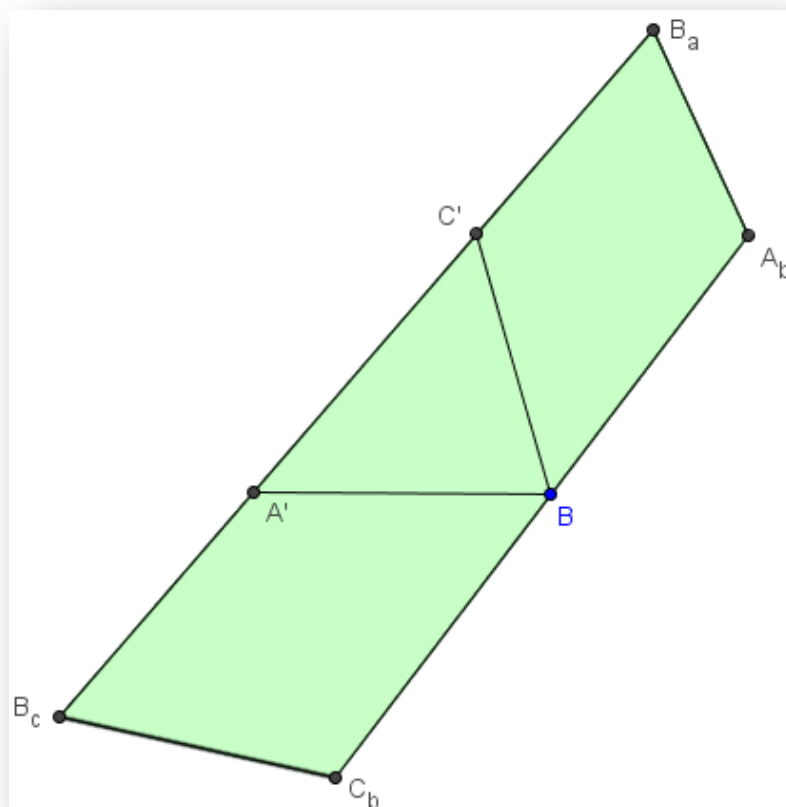
Figura $AC'B'A_cC_a$

1) Alternos-Internos	$\angle ACC_a = \angle CAI = \frac{\alpha}{2}$
2) Ángulos inscritos en la misma circunferencia	$\angle AA_cC_a = \angle ACC_a = \frac{\alpha}{2}$
3) $90^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}) = \frac{\beta}{2}$	$\angle C_aCA_c = \frac{\beta}{2}$
4) Ángulos inscritos en la misma circunferencia	$\angle C_aAA_c = \angle C_aCA_c = \frac{\beta}{2}$
5) $90^\circ - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = \frac{\gamma}{2}$	$\angle CAA_c = \frac{\gamma}{2}$
6) Triángulo isósceles $B'AA_c$	$\angle B'AA_c = \angle B'A_cA = \frac{\gamma}{2}$
7) C', B' y A_c están alineados	$\angle AB'C' = \gamma = \angle B'AA_c + \angle B'A_cA$

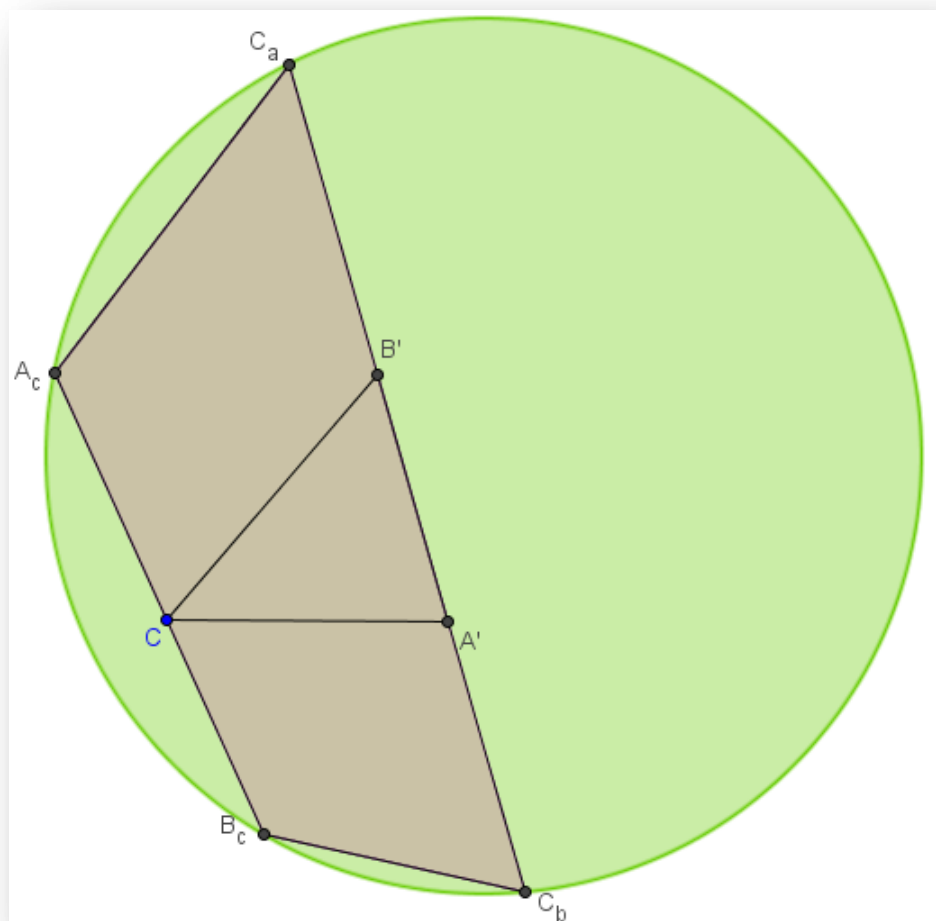
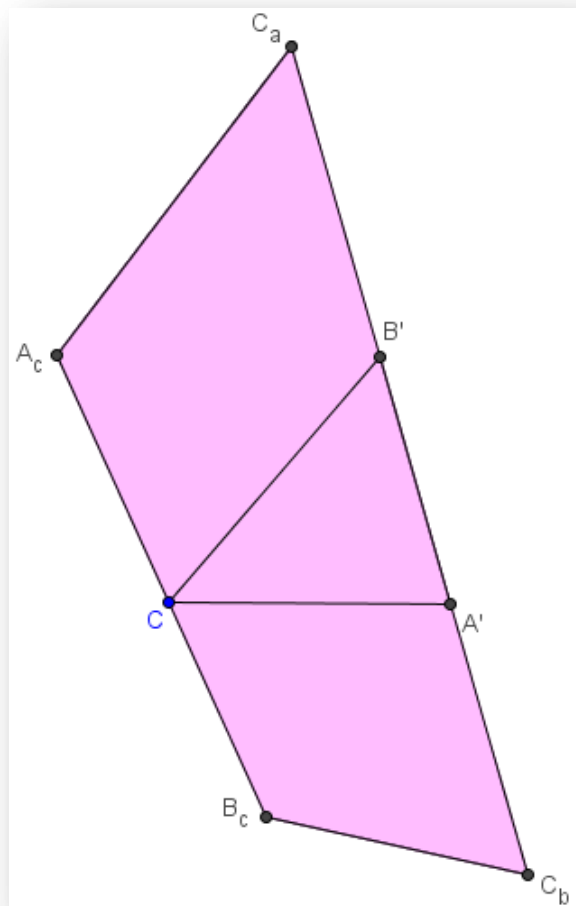
Así tenemos que el cuadrilátero $A_c C_a B_a A_b$ es inscriptible. Esto es fácil de ver ya que los ángulos en los vértices opuestos suman 180°



Procediendo de igual manera, probaríamos que el cuadrilátero $B_c C_b A_b B_a$ es inscriptible.



Procediendo de igual manera, probaríamos que el cuadrilátero $B_c C_b C_a A_c$ es inscriptible.



Sea alguno de los pares de los vértices del triángulo ABC. Sea por ejemplo, los puntos A y B. Considerando sus proyecciones ortogonales sobre las bisectrices exteriores correspondientes a dichos vértices, resultan los puntos A_b y B_a . Estos puntos A_b y B_a pertenecen a dos de las anteriores circunferencias, $A_c C_a B_a A_b$ y $B_c C_b A_b B_a$. Pero como resulta que los otros cuatro puntos $B_c C_b C_a A_c$, determinan otra circunferencia y, como todos los puntos son distintos, no queda más remedio que las tres circunferencias sean la misma.

En consecuencia, las seis proyecciones ortogonales de los vértices de un triángulo sobre las bisectrices exteriores son concíclicas.

cqd ■

