Problema 726 *.- Demostrar que las seis proyecciones ortogonales de los vértices de un triángulo sobre las bisectrices exteriores son concíclicas.*

Quadrature (2003) nº 48, pag 47. Magazine de mathématiques pures et épicées.

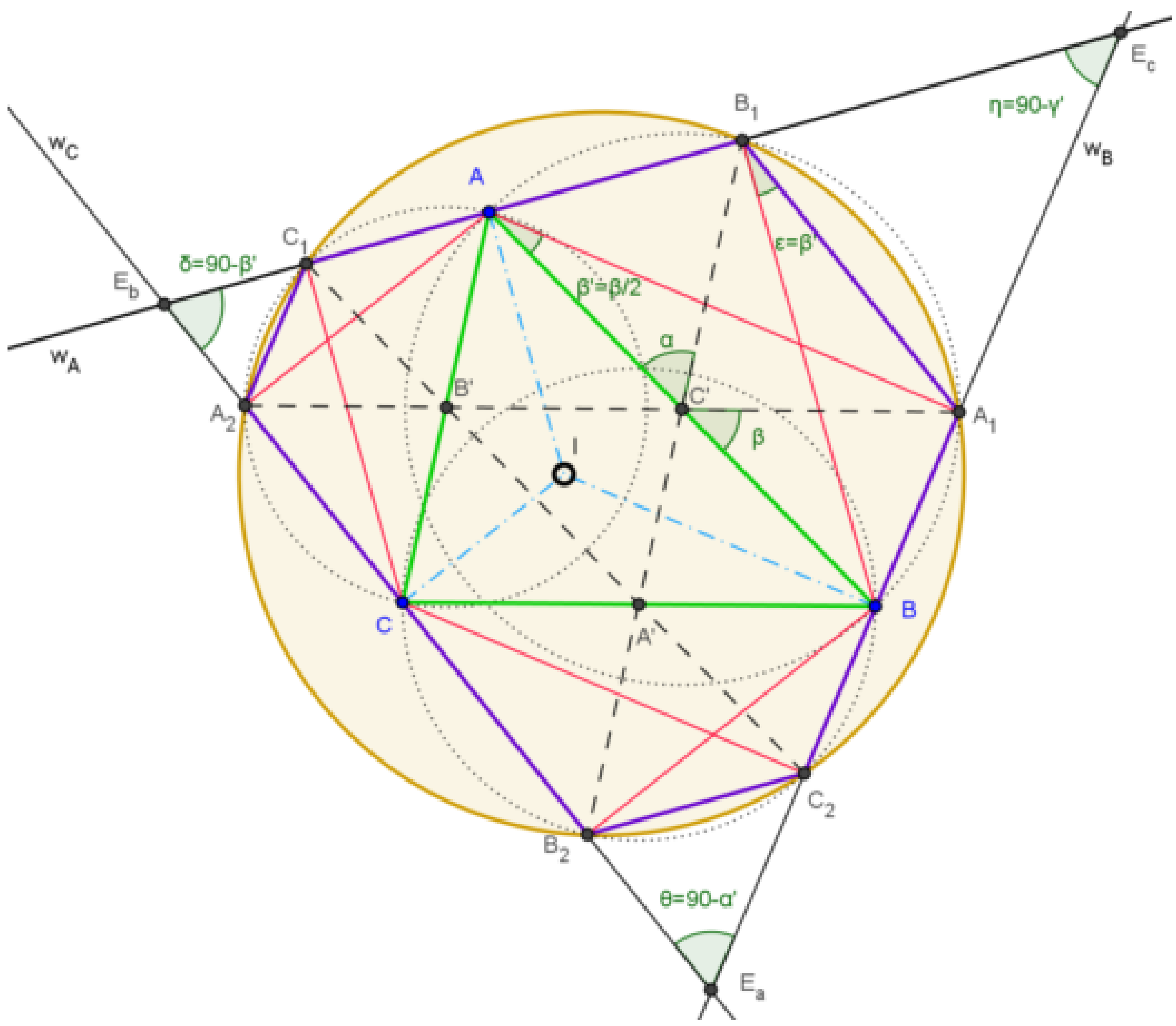
La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

- **Los pares de lados opuestos del hexágono $B_1C_1A_2B_2C_2A_1$ son paralelos.**

Sean α, β y γ los ángulos del triángulo ABC y α', β' y γ' a sus mitades. El triángulo excentral $E_aE_bE_c$ (formado por los tres excentros) tiene ángulos $90-\alpha', 90-\beta'$ y $90-\gamma'$ respectivamente. Los triángulos rectángulos AA_1B y AB_1B comparten la hipotenusa AB, por tanto, esos cuatro puntos están sobre una circunferencia de centro el punto medio C' de AB. De ello $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle BB_1A_1 = \frac{\beta}{2} = \beta'$ por ser IB paralelo a AA_1. De ahí $\sphericalangle A_1B_1E_c = 90-\beta'$ igual al ángulo del ex-centro E_b y por tanto el triángulo $\varDelta A_1B_1E_c$ es semejante al triángulo excentral y $B_1A_1 \parallel A_2B_2$ como pretendíamos probar.

Análogamente B', punto medio de AC, es el centro de la circunferencia que contiene a los puntos A_2C_1AC.



- **El cuadrilátero $A_2A_1B_1C_1$ es cíclico.**

Por el teorema del ángulo inscrito tenemos $\sphericalangle BC'A_1 = 2\sphericalangle BAA_1 = \beta$ y $\sphericalangle AC'B_1 = 2\sphericalangle ABB_1 = \alpha$ y de ahí que $\sphericalangle B_1C'A_1 = \gamma$ y $C'B_1 \parallel CA$; $C'A_1 \parallel CB$.

En el círculo homólogo de centro B' obtenemos resultados también homólogos, esto es, $B'C_1 \parallel BA$; $B'A_2 \parallel BC$.

De ambos se concluye que los puntos A_2, B', C', A_1 están sobre una recta paralela al lado BC.

Si $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle BB_1A_1 = \frac{\beta}{2} = \beta' \Longrightarrow \sphericalangle AB_1A_1 = 90+\beta'$.

En el triángulo isósceles $\varDelta B'A_2C_1$, el ángulo $\sphericalangle B'A_2C_1 = \frac{1}{2}\sphericalangle(180-\sphericalangle A_2B'C_1) = 90-\beta'$.

Con lo que queda demostrado que el cuadrilátero es cíclico.

- **El cuadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ es cíclico.**

En los triángulos isósceles y semejantes $\varDelta C'A_1B_1$ y $\varDelta C'A_2B_2$ se verifica la siguiente relación $C'A_1 \cdot C'A_2 = C'B_1 \cdot C'B_2$, por tanto A_1, B_1, B_2, A_2 yacen en una circunferencia.

Con esto, todos los puntos del problema excepto C_2, estarían sobre una circunferencia, pero como con cinco puntos queda definida la cónica en la yacen todos, necesariamente también C_2 estaría en esta circunferencia.

■