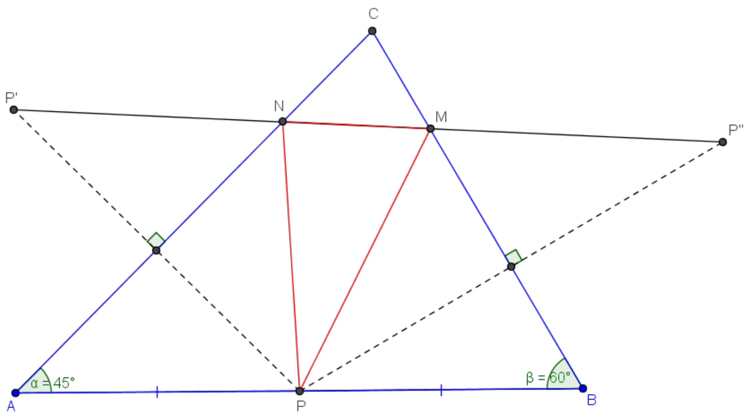
Solución al Problema 727
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 16 al 31 de enero de 2015

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Enero 19, 2015

Problema 727. *Martínez, R. (2014): Calendari Matemátic 2014-2015. 16 Novembre.*
En un triángulo, ABC, con $\angle CAB = 45°$, $\angle CBA = 60°$, P es el punto medio de AB. Hallar los puntos M y N sobre CB y AC, respectivamente, que hacen mínimo el perímetro del $\triangle PMN$.

Solución 727. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Es un caso particular del problema de Fagnano. Por tanto los puntos M y N son las intersecciones entre la recta $P'P''$ y los lados CB y AC respectivamente. Donde los puntos P' y P'' son los simétricos de P respecto a los lados AC y CB.
Usando coordenadas baricéntricas $P(1:1:0)$ y siendo $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos B = \frac{1}{2}$, tenemos que

$$b = \frac{a}{2}\sqrt{6}, \quad c = \frac{a}{2}(\sqrt{3}+1), \quad S_A = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3}+3), \quad S_B = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3}+1), \quad S_C = \frac{a^2}{4}(3-\sqrt{3})$$

El punto del infinito de la perpendicular al lado CA es $CA_{\infty\perp}(S_C : -b^2 : S_A) = (3-\sqrt{3} : -6 : 3+\sqrt{3})$, por tanto la recta PP' tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3-\sqrt{3} & -6 & 3+\sqrt{3} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad PP' \equiv (3+\sqrt{3})x - (3+\sqrt{3})y + (\sqrt{3}-9)z = 0$$

el punto $P'_\perp = PP' \cap CA$ tiene coordenadas $P'_\perp = (9-\sqrt{3} : 0 : 3+\sqrt{3})$.
Ahora el punto P' simétrico de P respecto a $P'_\perp$ es $P' = (6-\sqrt{3} : -3 : 3+\sqrt{3})$.

En modo análogo, el punto del infinito de la perpendicular al lado CB es $CB_{\infty\perp}(-a^2 : S_C : S_B) = (-4 : 3-\sqrt{3} : \sqrt{3}+1)$, por tanto la recta PP'' tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3-\sqrt{3} & \sqrt{3}+1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad PP'' \equiv (\sqrt{3}+1)x - (\sqrt{3}+1)y + (7-\sqrt{3})z = 0$$

el punto $P''_\perp = PP'' \cap CB$ tiene coordenadas $P''_\perp = (0 : 7-\sqrt{3} : 1+\sqrt{3})$.
Por tanto el punto P'' simétrico de P respecto a $P''_\perp$ es $P'' = (-2 : 5-\sqrt{3} : 1+\sqrt{3})$.

Ahora la recta $P'P''$ tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 6-\sqrt{3} & -3 & 3+\sqrt{3} \\ -2 & 5-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad P'P'' \equiv 5(\sqrt{3}+3)x + (7\sqrt{3}+9)y + (11\sqrt{3}-27)z = 0$$

Entonces,
el punto $M = P'P'' \cap CB$ tiene coordenadas homogéneas $M = (0 : 27 - 11\sqrt{3} : 9 + 7\sqrt{3})$ y coordenadas absolutas $M = (0, \frac{35-12\sqrt{3}}{52}, \frac{17+12\sqrt{3}}{52})$
el punto $N = P'P'' \cap CA$ tiene coordenadas homogéneas $N = (27 - 11\sqrt{3} : 0 : 15 + 5\sqrt{3})$ y coordenadas absolutas $N = (\frac{78-25\sqrt{3}}{138}, 0, \frac{60+25\sqrt{3}}{138})$.

Con lo que los puntos M y N pedidos dividen BC y AC respectivamente, en las razónes

$$\frac{BM}{MC} = \frac{17+12\sqrt{3}}{35-12\sqrt{3}}, \qquad \frac{AN}{NC} = \frac{60+25\sqrt{3}}{78-25\sqrt{3}}.$$