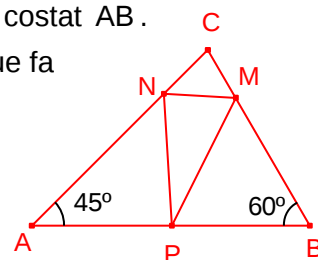


Problema 727

En el triangle $\triangle ABC$ de la figura, $A = 45^\circ$, $B = 60^\circ$, P és el punt mig del costat $\overline{AB}$.
 Determineu els punts M, N dels costats $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, respectivament, tal que fa mínim el perímetre del triangle $\triangle PMN$.



Solució de Ricard Peiró:

Siga P' el simètric de P respecte del costat $\overline{BC}$.

Siga P'' el simètric de P' respecte del costat $\overline{AC}$.

La recta que passa pels punts P, P'' talla el costat $\overline{AC}$ en el punt N .

La recta que passa pels punts N, P' talla el costat $\overline{BC}$ en el punt M .

Demostrarem que el triangle $\triangle PMN$ és el de perímetre mínim.

Siga $\overline{PM} = m$, $\overline{PN} = n$, $\overline{MN} = r$.

El perímetre del triangle $\triangle PMN$ és $m + n + r$.

Notem que $\overline{PM} = \overline{P'M} = m$, $\overline{NP'} = \overline{NP''} = m + r$.

Siguen K del costat $\overline{BC}$ i L del costat $\overline{AC}$.

Volem demostrar que el perímetre del triangle $\triangle PKL$ és major o igual que el perímetre del triangle $\triangle PMN$,

Siga $\overline{PK} = k$, $\overline{PL} = l$, $\overline{KL} = t$.

El perímetre del triangle $\triangle PKL$ és $k + l + t$.

Siga $\overline{LP''} = d$. $\overline{LP''} = \overline{LP'} = d$.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\triangle PLP''$:

$$\overline{PL} + \overline{LP''} \geq \overline{PP''}.$$

$$l + d \geq m + n + r.$$

$$\overline{PK} = \overline{P'K} = k.$$

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\triangle LKP'$:

$$\overline{LK} + \overline{KP'} \geq \overline{LP'}.$$

$$t + k \geq d.$$

$$t + k + l \geq d + l \geq m + n + r.$$

Aleshores el perímetre del triangle $\triangle PKL$ és major o igual que el perímetre del triangle $\triangle PMN$.

