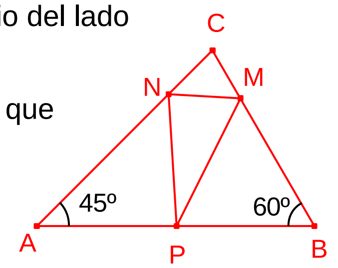
Problema 727

En el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura, $A = 45^o$, $B = 60^o$, P es el punto medio del lado $\overline{AB}$.



Determinar los puntos M, N de los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, respectivamente, tal que hace mínimo el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{PMN}$.

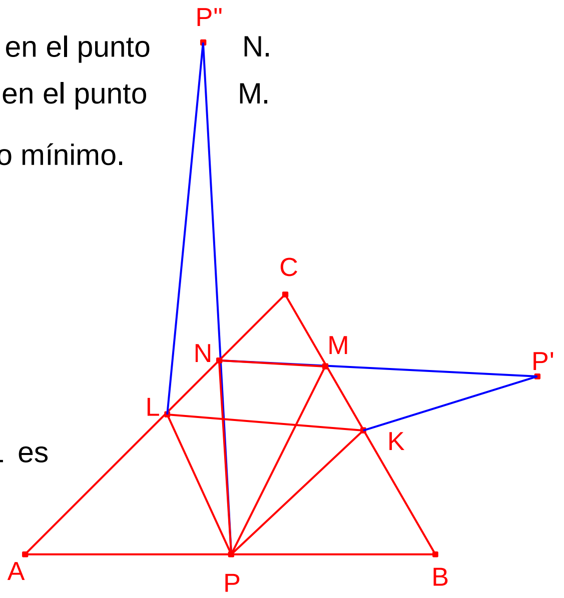
Solución de Ricard Peiró:

Sea P' el simétrico de P respecto del lado $\overline{BC}$.

Sea P" el simétrico de P' respecto del lado $\overline{AC}$.

La recta que pasa por los puntos P, P" corta el lado $\overline{AC}$ en el punto N.

La recta que pasa por los puntos N, P' corta el lado $\overline{BC}$ en el punto M.



Demostraremos que el triángulo $\overset{\Delta}{PMN}$ es el de perímetro mínimo.

Sea $\overline{PM} = m$, $\overline{PN} = n$, $\overline{MN} = r$.

El perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{PMN}$ es $m + n + r$.

Notemos que $\overline{PM} = P'M = m$, $\overline{NP'} = \overline{NP''} = m + r$.

Sean K del lado $\overline{BC}$ i L del lado $\overline{AC}$.

Queremos demostrar que el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{PKL}$ es mayor o igual que el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{PMN}$,

Sea $\overline{PK} = k$, $\overline{PL} = l$, $\overline{KL} = t$.

El perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{PKL}$ es $k + l + t$.

Sea $\overline{LP''} = d$. $\overline{LP''} = \overline{LP'} = d$.

Aplicando la desigualdad triangular al triángulo $\overset{\Delta}{PLP''}$:

$\overline{PL} + \overline{LP''} \geq \overline{PP''}$.

$l + d \geq m + n + r$.

$\overline{PK} = \overline{P'K} = k$.

Aplicando la desigualdad triangular al triángulo $\overset{\Delta}{LKP'}$:

$\overline{LK} + \overline{KP'} \geq \overline{LP'}$.

$t + k \geq d$.

$t + k + l \geq d + l \geq m + n + r$.

Entonces, el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{PKL}$ es mayor o igual que el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{PMN}$.