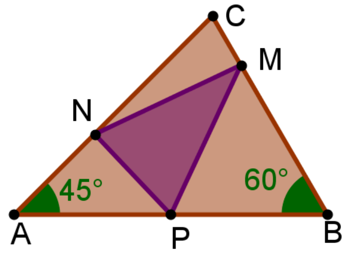
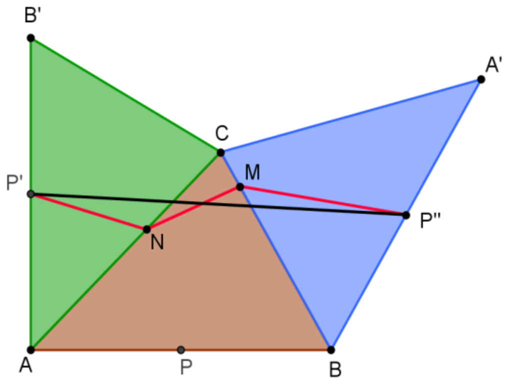
PROBLEMA 727 (CALENDARIO MATEMÁTICO 2014-2105. ACTIVIDAD CORRESPONDIENTE AL 16 DE NOVIEMBRE DE 2014).- Sea dado el triángulo $\triangle ABC$ con $\angle A = 45°$ y $\angle B = 60°$, $AB = 2$ y P el punto medio del segmento AB. Si N (M) es un punto del lado AC (BC), ¿cuál es el valor más pequeño del perímetro del triángulo $\triangle PNM$?

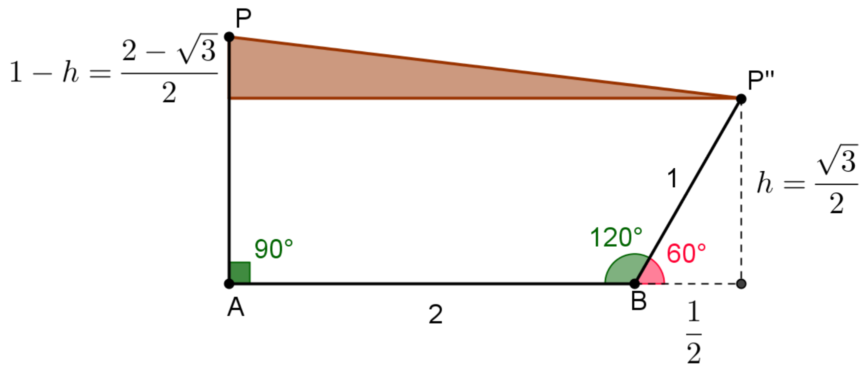


SOLUCIÓN DE RAFAEL MARTÍNEZ CALAFAT (I.E.S. “LA PLANA”. CASTELLÓN):



A partir del triángulo inicial $\triangle ABC$, se genera el triángulo $\triangle AB'C$ (simétrico del inicial respecto del lado AC) y el triángulo $\triangle CBA'$ (simétrico del inicial respecto del lado CB). Entonces $PN = P'N$ y $MP = MP''$. Por tanto el perímetro del $\triangle PNM$ es mínimo cuando $P'N + NM + P''M$ es mínimo y esto ocurre cuando la poligonal P’NMP’’ coincide con el segmento rectilíneo que une P’ y P’’

Consideremos entonces el cuadrilátero AP’P’’B.



En este cuadrilátero h es la altura de un triángulo equilátero de base 1 y por tanto

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y en el triángulo sombreado podemos aplicar Pitágoras y obtenemos:

$$P'P'' = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+3-4\sqrt{3}+25}{4}} = \sqrt{8-\sqrt{3}}$$