

Solución al Problema 728
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 1 al 14 de febrero de 2015

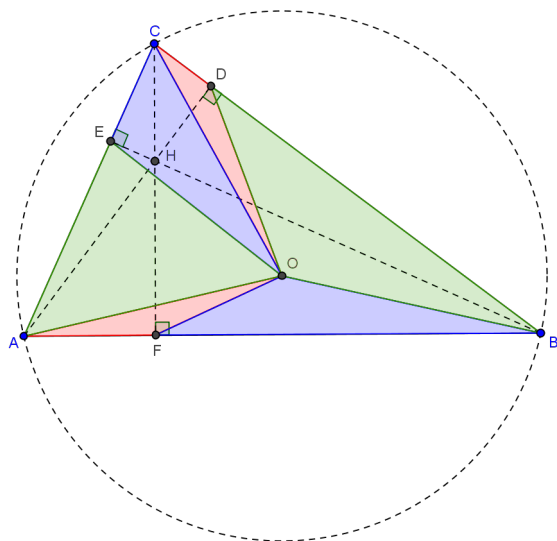
enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Febrero 3, 2015

Problema 728. *XXV APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad), 2013.*

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con alturas AD , BE y CF . Sea O el circuncentro de ABC . Mostrar que los segmentos OA , OF , OB , OD , OC , OE dividen al triángulo ABC en tres pares de triángulos de áreas iguales.

Solución 728. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas absolutas, tenemos que

$$D\left(0, \frac{S_C}{a^2}, \frac{S_B}{a^2}\right), \quad E\left(\frac{S_C}{b^2}, 0, \frac{S_A}{b^2}\right), \quad F\left(\frac{S_B}{c^2}, \frac{S_A}{c^2}, 0\right), \quad O\left(\frac{a^2 S_A}{2S^2}, \frac{b^2 S_B}{2S^2}, \frac{c^2 S_C}{2S^2}\right)$$

Pues,

$$\text{área} AFO = \text{área} ABC \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{S_B}{c^2} & \frac{S_A}{c^2} & 0 \\ \frac{a^2 S_A}{2S^2} & \frac{b^2 S_B}{2S^2} & \frac{c^2 S_C}{2S^2} \end{vmatrix} = \frac{S_A S_C}{2S^2} \text{área} ABC$$

$$\text{área} DCO = \text{área} ABC \begin{vmatrix} 0 & \frac{S_C}{a^2} & \frac{S_B}{a^2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{a^2 S_A}{2S^2} & \frac{b^2 S_B}{2S^2} & \frac{c^2 S_C}{2S^2} \end{vmatrix} = \frac{S_A S_C}{2S^2} \text{área} ABC$$

$$\acute{area}FBO = \acute{area}ABC \begin{vmatrix} \frac{S_B}{c^2} & \frac{S_A}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a^2 S_A}{2S^2} & \frac{b^2 S_B}{2S^2} & \frac{c^2 S_C}{2S^2} \end{vmatrix} = \frac{S_B S_C}{2S^2} \acute{area}ABC$$

$$\acute{area}CEO = \acute{area}ABC \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{S_C}{b^2} & 0 & \frac{S_A}{b^2} \\ \frac{a^2 S_A}{2S^2} & \frac{b^2 S_B}{2S^2} & \frac{c^2 S_C}{2S^2} \end{vmatrix} = \frac{S_B S_C}{2S^2} \acute{area}ABC$$

$$\acute{area}BDO = \acute{area}ABC \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{S_C}{a^2} & \frac{S_B}{a^2} \\ \frac{a^2 S_A}{2S^2} & \frac{b^2 S_B}{2S^2} & \frac{c^2 S_C}{2S^2} \end{vmatrix} = \frac{S_A S_B}{2S^2} \acute{area}ABC$$

$$\acute{area}EAO = \acute{area}ABC \begin{vmatrix} \frac{S_C}{b^2} & 0 & \frac{S_A}{b^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{a^2 S_A}{2S^2} & \frac{b^2 S_B}{2S^2} & \frac{c^2 S_C}{2S^2} \end{vmatrix} = \frac{S_A S_B}{2S^2} \acute{area}ABC$$

Entonces,

$$\acute{area}AFO = \acute{area}DCO, \quad \acute{area}FBO = \acute{area}CEO, \quad \acute{area}BDO = \acute{area}EAO, \quad q.e.d.$$