

Problema 728.

Sea ABC un triángulo acutángulo con alturas AD , BE y CF . Sea O el circuncentro de ABC . Mostrar que los segmentos OA , OF , OB , OD , OC , OE dividen al triángulo ABC en tres pares de triángulos de áreas iguales.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Mostremos que los tres pares de triángulos OBD y OEA , OCE y OFB , OEA y OBD tienen áreas iguales.

Tenemos que $[OBD] = \frac{1}{2} BO \cdot BD \sin \angle DBO$, donde BO es el circunradio de ABC , BD es un lado del triángulo ABD , que es rectángulo en D por ser $AD \perp BD$, y

$\angle DBO = \angle OCB = \frac{1}{2}(\pi - \angle BOC) = \frac{1}{2}(\pi - 2\angle BAC)$ debido a que OBC es isósceles porque OB y OC son iguales al circunradio de ABC y $\angle BOC$ es el ángulo central asociado al ángulo $\angle BAC$ inscrito en la circunferencia circunscrita a ABC , luego

$$[OBD] = \frac{1}{2} BO \cdot AB \cos \angle DBA \sin \left(\frac{\pi}{2} - \angle BAC \right) = \frac{1}{2} BO \cdot AB \cos \angle CBA \cos \angle BAC.$$

Del mismo modo, $[OEA] = \frac{1}{2} AO \cdot AE \sin \angle OAE = \frac{1}{2} AO \cdot AB \cos \angle BAC \sin \left(\frac{\pi}{2} - \angle CBA \right)$, con lo cual $[OBD] = [OEA]$. Análogamente, $[OCE] = [OFB]$ y $[OEA] = [OBD]$.