

Problema 728.

Sexa ABC un triángulo acutángulo con alturas AD , BE e CF . Sexa O o circuncentro de ABC . Mostrar que os segmentos OA , OF , OB , OD , OC , OE dividen ao triángulo ABC en tres pares de triángulos de áreas iguais.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Mostremos que os tres pares de triángulos OBD e OEA , OCE e OFB , OEA e OBD teñen áreas iguais.

Temos que $[OBD] = \frac{1}{2} BO \cdot BD \sin \angle DBO$, onde BO é o circunraio de ABC , BD é un lado do triángulo ABD , que é rectángulo en D por ser $AD \perp BD$, e

$\angle DBO = \angle OCB = \frac{1}{2}(\pi - \angle BOC) = \frac{1}{2}(\pi - 2\angle BAC)$ debido a que OBC é isóscele porque OB e OC son iguais ao circunraio de ABC e $\angle BOC$ é o ángulo central asociado ao ángulo $\angle BAC$ inscrito na circunferencia circunscrita a ABC , logo

$$[OBD] = \frac{1}{2} BO \cdot AB \cos \angle DBA \sin \left(\frac{\pi}{2} - \angle BAC \right) = \frac{1}{2} BO \cdot AB \cos \angle CBA \cos \angle BAC.$$

Do mesmo xeito, $[OEA] = \frac{1}{2} AO \cdot AE \sin \angle OAE = \frac{1}{2} AO \cdot AB \cos \angle BAC \sin \left(\frac{\pi}{2} - \angle CBA \right)$, co cal $[OBD] = [OEA]$. Analogamente, $[OCE] = [OFB]$ e $[OEA] = [OBD]$.