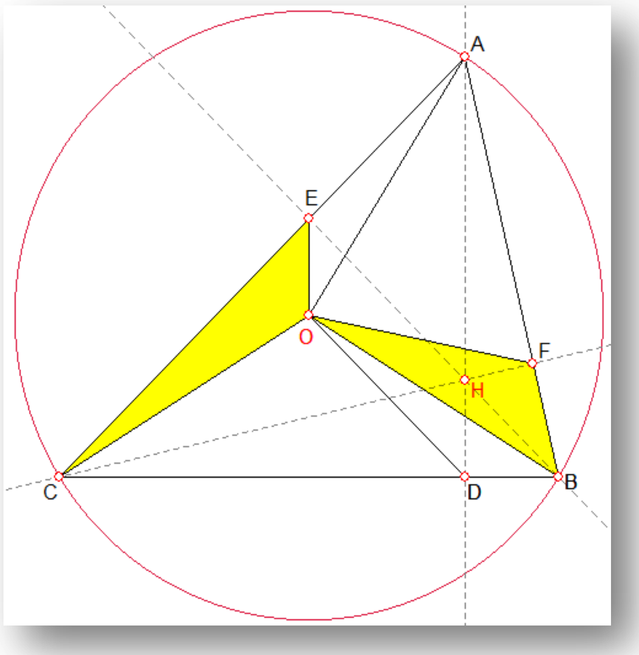
Problema 728.-

Sea ABC un triángulo acutángulo con alturas AD, BE y CF. Sea O el circuncentro de ABC.
Mostrar que los segmentos OA, OF, OB, OD, OC, OE dividen al triángulo ABC en tres pares de triángulos de áreas iguales.

XXV APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad), 2013

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Una vez construidos los triángulos según el enunciado, consideramos el par de triángulos OBF y OCE.
Vamos a mostrar que, en efecto, son equivalentes. Para ello, sigamos los siguientes pasos.



En el triángulo $\Delta \boldsymbol{OBF}$, se tiene que

$$\boldsymbol{Área}(\Delta \boldsymbol{OBF}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{OB}.\boldsymbol{BF}.\sin\measuredangle \boldsymbol{OBF}$$

$Como\ \ OB = R;$

$BF = a.cos\measuredangle B;$

$\measuredangle OBF = \measuredangle B - (90º - \measuredangle A) = \measuredangle B + \measuredangle A - 90º$
$\measuredangle OBF = 90º - \measuredangle C \rightarrow sin\measuredangle OBF = cos\measuredangle C;$
Por tanto,

$$\boldsymbol{Área}(\Delta \boldsymbol{OBF}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{OB}.\boldsymbol{BF}.\sin\measuredangle \boldsymbol{OBF}$$

$$\boldsymbol{Área}(\Delta \boldsymbol{OBF}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{R}.\boldsymbol{a}.\boldsymbol{cos}\measuredangle \boldsymbol{B}.\cos\measuredangle \boldsymbol{C}$$

Sea ahora el triángulo $\Delta \boldsymbol{OCE}$

$$\boldsymbol{Área}(\Delta \boldsymbol{OCE}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{OC}.\boldsymbol{CE}.\sin\measuredangle \boldsymbol{OCE}$$

$Como\ \ OC = R;$

$CE = a.cos\measuredangle C;$

$\measuredangle OCE = \measuredangle C - (90º - \measuredangle A) = \measuredangle C + \measuredangle A - 90º = 90º - \measuredangle B \rightarrow sin\measuredangle OCE = cos\measuredangle B;$

Por tanto, $\boldsymbol{Área}(\Delta \boldsymbol{OCE}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{OC}.\boldsymbol{CE}.\sin\measuredangle \boldsymbol{OCE} = \frac{1}{2}\boldsymbol{R}.\boldsymbol{a}.\boldsymbol{cos}\measuredangle \boldsymbol{C}.\cos\measuredangle \boldsymbol{B}$

En definitiva, hemos probado que $\boldsymbol{Área}(\Delta \boldsymbol{OBF}) = \boldsymbol{Área}(\Delta \boldsymbol{OCE})$

De igual forma, probaríamos la igualdad de áreas entre los otros pares de triángulos $\Delta \boldsymbol{OBD}\ \boldsymbol{y}\ \Delta \boldsymbol{OAE}$ y $\Delta \boldsymbol{OAF}$ **y** $\Delta \boldsymbol{OCD}$.

De igual manera se probarían las igualdades de áreas entre los otros dos pares de triángulos $\Delta \boldsymbol{O}\mathrm{B}\boldsymbol{C}$ y $\Delta \boldsymbol{OAF}$**,** y $\Delta \boldsymbol{OAE}$ y $\Delta \boldsymbol{ODB}$**.**