

Quincena del 1 al 14 de Febrero de 2015

Problema 728

Problema 1.

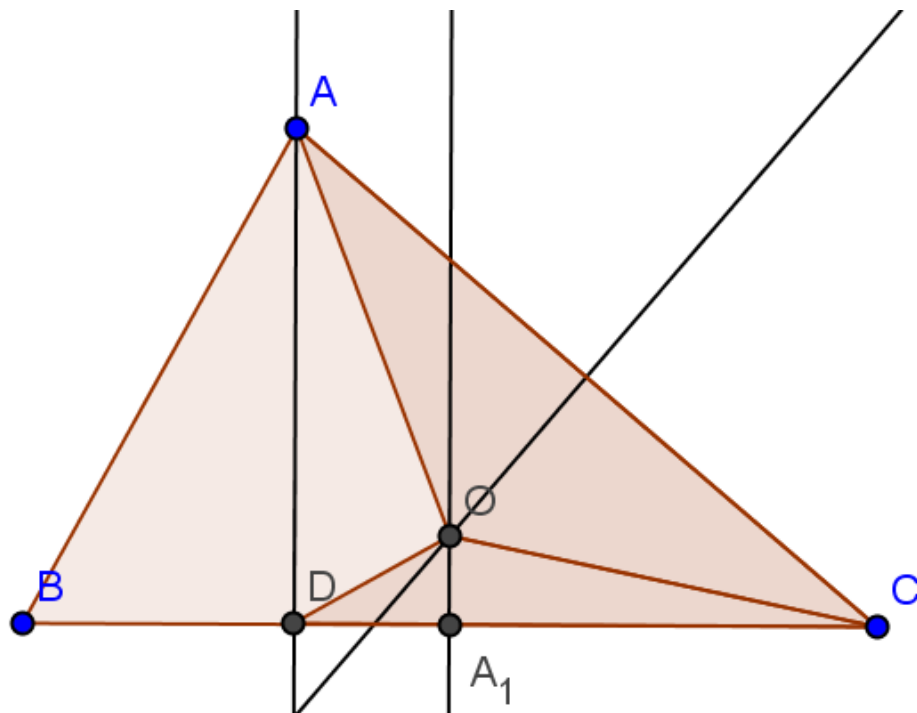
Sea ABC un triángulo acutángulo con alturas AD , BE y CF . Sea O el circuncentro de ABC .

Mostrar que los segmentos OA , OF , OB , OD , OC , OE dividen al triángulo ABC en tres pares de triángulos de áreas iguales.

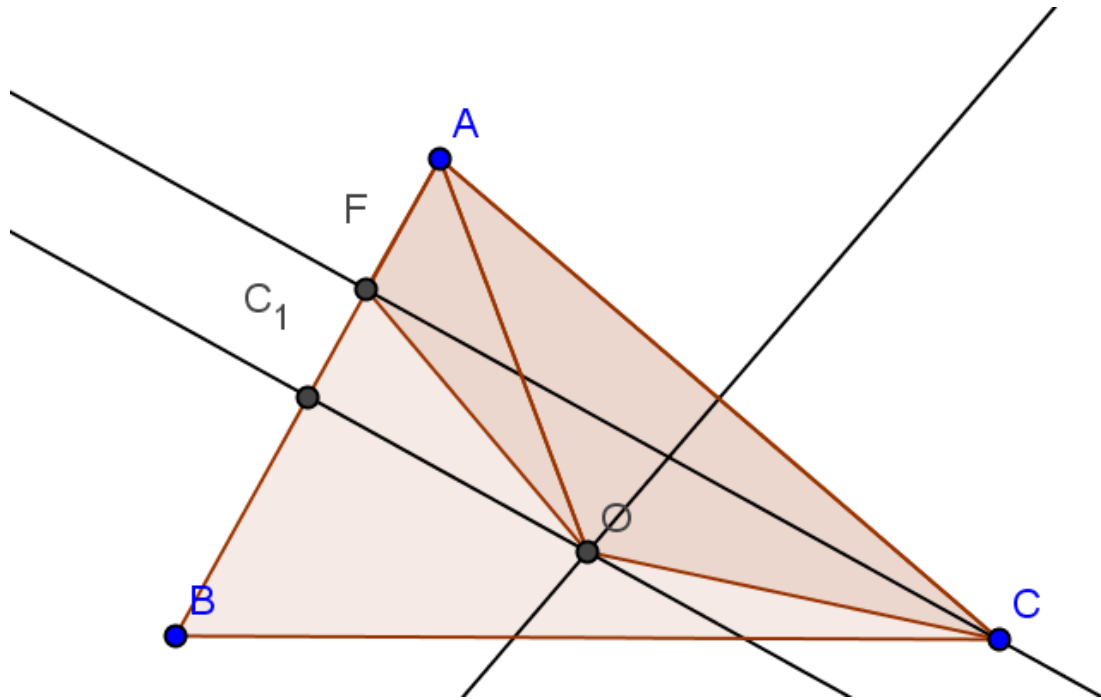
XXV APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad) , 2013

[APMO](#)

Sea A_1 el punto medio de BC . OA_1 es perpendicular a BC y paralelo a AD .



$[AOD]=[AA_1D]$, con lo que $[AOC]+[DOC]=[ADC]-[AA_1D]=[AA_1D]=1/2 [ABC]$



Sea C_1 el punto medio de AB .

Por analogía, $[COF] = [CC_1F]$, por lo que $[AOF] + [AOC] = [AFC] + [FC_1C] = [AC_1C] = \frac{1}{2}[ABC]$

Así $[AFOC] = [CDOA] = \frac{1}{2}[ABC]$, de donde se obtiene:

$$[ODC] = [CDOA] - [OCA] = [AOF] - [OCA] = [OAF].$$

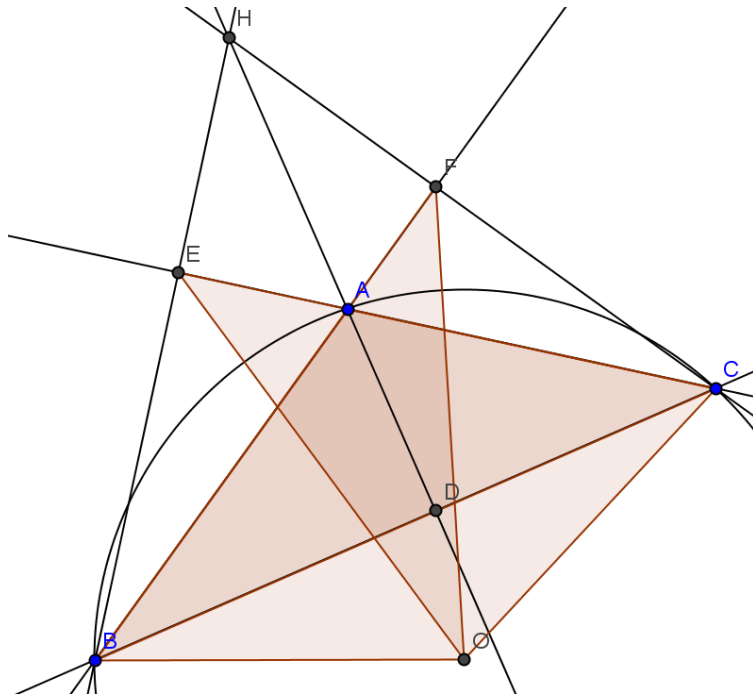
De manera análoga, podemos obtener $[ODB] = [OAE]$, $[OBF] = [OCE]$

¿Porqué se exige ser acutángulo?

Si fuese rectángulo en A , F se confundiría con E en A .

Los triángulos OFA , OEA , ODC y ODB serían degenerados, por lo que sus áreas serían 0.

Los triángulos OBF y OCE serían de área $\frac{1}{2}$ del ABC . Así permanecería la propiedad.



En caso de ser obtusángulo en A, los pies E y F están en el exterior de los segmentos AB y AC.

Permanece el hecho de ser: $[ODC]=[OAF]$, $[ODB]=[OAE]$ y $[OBF]=[OCE]$, pero ya no se verifica el ser la suma de las áreas los seis triángulos igual al área de ABC. Estudiemos cada caso.

1) $[ODC]=[OAF]$

En el triángulo ODC tenemos:

$$OC=R, DC = b \cos \gamma, \angle DCO = \angle ACO - \angle ACD = (90^\circ - \beta) - \gamma.$$

$$\text{Luego } [OCD] = R b \cos \gamma \operatorname{sen} (90^\circ - \beta - \gamma)$$

El caso del triángulo OAF, es:

$$\text{AF en el triángulo rectángulo AFC, es } \angle ACF = 90^\circ - \beta - \gamma, \angle CAF = \beta + \gamma, FA = b \cos (\beta + \gamma)$$

$$\text{Por otra parte } \angle OAF = \angle OAC + \angle CAF = (90^\circ - \beta) + (\beta + \gamma) = 90^\circ + \gamma$$

$$\text{Luego tenemos } [OAF] = (OA AF \operatorname{sen} \angle OAF) / 2 = R b \cos (\beta + \gamma) \operatorname{sen} (90^\circ + \gamma) / 2$$

Dado que $\cos (\beta + \gamma) = \operatorname{sen} (90^\circ - \beta - \gamma)$, y que $\cos \gamma = \operatorname{sen} (90^\circ + \gamma)$, tenemos lo pedido.

2) $[ODB]=[OAE]$

$$\text{Triángulo DBO : } DB = c \cos \beta; \angle BOA = 2\gamma; \angle ABO = 90^\circ - \gamma; \angle DBO = 90^\circ - \gamma - \beta$$

$$\text{Así, siendo } DO=R, \text{ es } [DBO] = DB BO \operatorname{sen} (90^\circ - \gamma - \beta) / 2 = c \cos \beta R \operatorname{sen} (90^\circ - \gamma - \beta)$$

$$\text{Triángulo EAO; en el triángulo rectángulo en E BAE, tenemos } \angle EAB = 180 - \alpha = \beta + \gamma$$

Así $\angle ABE = 90^\circ - \beta - \gamma$. Luego es $EA = AB \sin(90^\circ - \beta - \gamma) = c \sin(90^\circ - \beta - \gamma)$.

Por otra parte, es $\angle OAE = \angle EAB + \angle BAO = (\beta + \gamma) + (90^\circ - \gamma) = 90^\circ + \beta$

Así es $[AEO] = \frac{AE \cdot AO \sin(90^\circ + \beta)}{2} = \frac{c \sin(90^\circ - \beta - \gamma) \cdot R \sin(90^\circ + \beta)}{2}$

Dado que $\sin(90^\circ + \beta) = \cos \beta$, tenemos lo pedido.

3) $[OCE] = [OBF]$

En el triángulo rectángulo CEB, es $CE = a \cos \gamma$

$\angle ECO = \angle ECB + \angle BCO = \gamma + (\alpha - 90^\circ)$.

$$\text{Así, es } [OCE] = \frac{CE \cdot OC \sin \angle ECO}{2} = \frac{a \cos \gamma \cdot R \sin(\alpha + \gamma - 90^\circ)}{2} = \frac{a \cdot R \cos \gamma \cos \beta}{2}$$

De igual manera,

En el triángulo rectángulo BFC, tenemos $BF = a \cos \beta$

$$\angle FBO = \angle FBC + \angle CBO = \beta + (\alpha - 90^\circ)$$

Así tenemos lo pedido:

$$[OBF] = \frac{BF \cdot OB \sin \angle FBO}{2} = \frac{a \cos \beta \cdot R \sin(\beta + \alpha - 90^\circ)}{2} = \frac{a \cos \beta \cos \gamma}{2} = [OCE]$$

Ricardo Barroso Campos.

Sevilla.

Director de Trianguloscabri