

Problema 728 de triángulos cabri. Sea ABC un triángulo acutángulo con alturas AD , BE y CF . Sea O el circuncentro de ABC . Mostrar que los segmentos OA , OF , OB , OD , OC , OE dividen al triángulo ABC en tres pares de triángulos de áreas iguales.

XXV APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad), 2013.

Solución de Francisco Javier García Capitán

En lugar de considerar las alturas AD , BE y CF consideramos las cevianas AA' , BB' y CC' de un punto $P = (x : y : z)$, y en lugar del circuncentro consideramos el conjugado isogonal Q del punto P .

Como $B = (0 : 1 : 0)$, $C' = (x : y : 0)$ y $Q = (a^2yz : b^2zx : c^2xy)$, el área de $BC'Q$ es

$$\begin{aligned} (BC'Q) &= \frac{1}{(x+y)(a^2yz + b^2zx + c^2xy)} \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2yz & b^2zx & c^2xy \end{vmatrix} \\ &= \frac{c^2x^2y}{(x+y)(a^2yz + b^2zx + c^2xy)}. \end{aligned}$$

De forma análoga el área del triángulo $CB'Q$ es

$$(CB'Q) = \frac{b^2x^2z}{(x+z)(a^2yz + b^2zx + c^2xy)}.$$

Estas áreas serán iguales cuando P está sobre la cónica Γ_a de ecuación $(b^2 - c^2)yz + b^2zx - c^2xy = 0$, que pasa por los vértices del triángulo y tiene por puntos infinito a $(-b - c : b : c)$ y $(b - c : -b : c)$, es decir, los puntos del infinito de las bisectrices del ángulo A .

En consecuencia, por ser perpendiculares las bisectrices de cada ángulo, Γ_a es una hipérbola equilátera y contiene al ortocentro H del triángulo, que también estará en las otras dos hipérbolas correspondientes a los otros dos vértices, por lo que queda demostrado que el ortocentro cumple la propiedad del enunciado.