

Problema 728

Siga $\triangle ABC$ un triangle acutangle amb altures $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$.

Siga O el circumcentre de $\triangle ABC$.

Proveu que els segments $\overline{OA}$, $\overline{OF}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{OC}$, $\overline{OE}$ divideixen el triangle $\triangle ABC$ en tres parells de triangles d'àrees iguals.

Solució de Ricard Peiró.

Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle.

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R.$$

Considerem els triangles $\triangle AFO$, $\triangle CDO$. Vegem que tenen la mateixa àrea.

$$\angle AOB = 2C, \angle BOC = 2A.$$

Els triangles $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ són isòsceles.

$$\angle OAB = 90^\circ - C, \angle OCD = 90^\circ - A.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AFC$: $\overline{AF} = b \cdot \cos A$.

L'àrea del triangle $\triangle AFO$ és:

$$S_{\triangle AFO} = \frac{1}{2} \overline{AF} \cdot \overline{AO} \cdot \sin(90^\circ - C) = \frac{1}{2} b \cdot \cos A \cdot R \cdot \sin(90^\circ - C) = \frac{1}{2} bR \cdot \cos A \cdot \cos C.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ADC$: $\overline{CD} = b \cdot \cos C$.

L'àrea del triangle $\triangle CDO$ és:

$$S_{\triangle CDO} = \frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \overline{CO} \cdot \sin(90^\circ - A) = \frac{1}{2} b \cdot \cos C \cdot R \cdot \sin(90^\circ - A) = \frac{1}{2} bR \cdot \cos A \cdot \cos C.$$

Aleshores, $S_{\triangle AFO} = S_{\triangle CDO}$.

Anàlogament, $S_{\triangle BFO} = S_{\triangle CEO} = \frac{1}{2} aR \cdot \cos B \cdot \cos C$, $S_{\triangle BDO} = S_{\triangle AEO} = \frac{1}{2} cR \cdot \cos A \cdot \cos B$.

