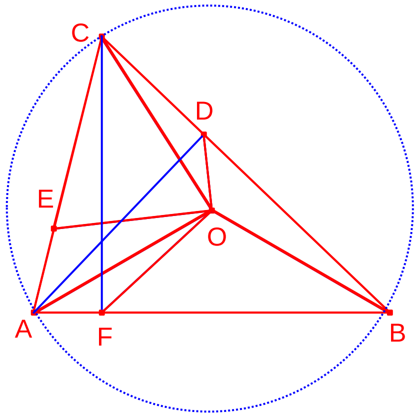
Problema 728

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo acutángulo con alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$.

Sea O el circuncentro de $\overset{\Delta}{ABC}$.

Mostrar que los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OF}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{OC}$, $\overline{OE}$ dividen el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ en tres pares de triángulos de áreas iguales.



Solución de Ricard Peiró.

Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$.

Consideremos los triángulos $\overset{\Delta}{AFO}$, $\overset{\Delta}{CDO}$. Veamos que tienen la misma área.

$\angle AOB = 2C$, $\angle BOC = 2A$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{AOB}$, $\overset{\Delta}{BOC}$ son isósceles.

$\angle OAB = 90º - C$, $\angle OCD = 90º - A$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AFC}$:

$\overline{AF} = b \cdot \cos A$.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{AFO}$ es:

$$S_{AFO} = \frac{1}{2}\overline{AF} \cdot \overline{AO} \cdot \sin(90º - C) = \frac{1}{2} b \cdot \cos A \cdot R \cdot \sin(90º - C) = \frac{1}{2} bR \cdot \cos A \cdot \cos C.$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADC}$:

$\overline{CD} = b \cdot \cos C$.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{CDO}$ es:

$$S_{CDO} = \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{CO} \cdot \sin(90º - A) = \frac{1}{2} b \cdot \cos C \cdot R \cdot \sin(90º - A) = \frac{1}{2} bR \cdot \cos A \cdot \cos C.$$

Entonces, $S_{AFO} = S_{CDO}$.

Análogamente, $S_{BFO} = S_{CEO} = \frac{1}{2} aR \cdot \cos B \cdot \cos C$, $S_{BDO} = S_{AEO} = \frac{1}{2} cR \cdot \cos A \cdot \cos B$.