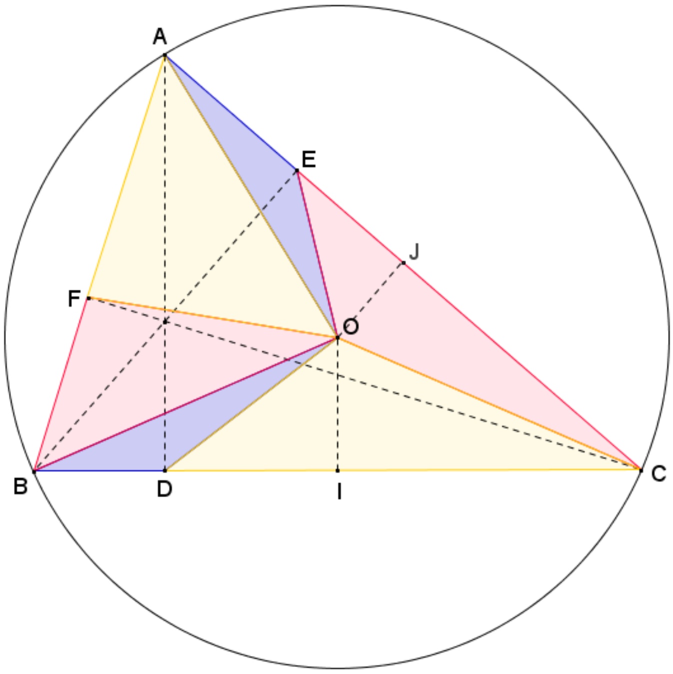
Problema 728

Problema 1.
Sea ABC un triángulo acutángulo con alturas AD, BE y CF. Sea O el circuncentro de ABC. Mostrar que los segmentos OA, OF, OB, OD, OC, OE dividen al triángulo ABC en tres pares de triángulos de áreas iguales.
XXV APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad) , 2013

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Les triangles pris deux à deux de même couleur ont la même aire. Il suffit de démontrer cette propriété pour les deux triangles bleus OAE et ODB par exemple. Par permutation sur les lettres A et E qui deviennent F et E et sur les lettres D et B qui deviennent C et D la propriété s'applique aux triangles OFA et OCD. Même propriété pour les triangles OBF et OCE.
Soient I et J les projections du centre O du cercle circonscrit sur les côtés BC et AC.OI et OJ sont les bissectrices des angles ∠BOC et ∠AOC avec ∠BOC = 2∠BAC et ∠AOC = 2∠ABC.
On pose R = OA = OB le rayon du cercle circonscrit
On a les relations suivantes :

1) aire (OAE) = AE*OJ/2 = AB*cos(∠BAC)*R*cos(∠AOC/2) = AB*R*cos(∠BAC)*cos(∠ABC)
2) aire(ODB) = BD*OI/2 = AB*cos(∠ABC)*R*cos(∠BOC/2) = AB*R*cos(∠ABC)*cos(∠BAC)

cqfd.