

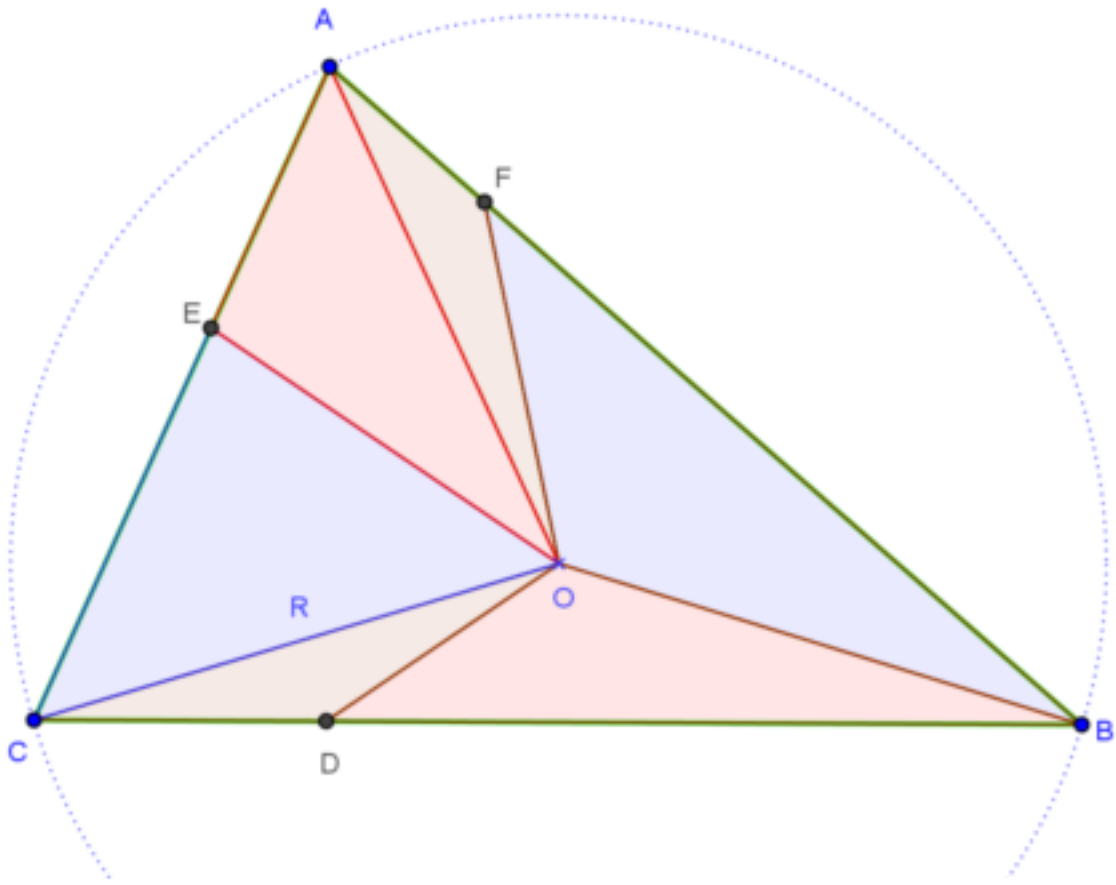
Problema 728

Problema 1.

Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo con alturas  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$ . Sea  $O$  el circuncentro de  $ABC$ . Mostrar que los segmentos  $OA$ ,  $OF$ ,  $OB$ ,  $OD$ ,  $OC$ ,  $OE$  dividen al triángulo  $ABC$  en tres pares de triángulos de áreas iguales.

XXV APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad), 2013. [APMO](#)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea  $R$  el radio de la circunferencia circunscrita. Poniendo, para un triángulo cualquiera,

$\text{Área}(MNP) = [MNP] = \frac{1}{2} MN \cdot MP \cdot \text{sen}(M)$ , tenemos para  $\triangle OCD$  y  $\triangle OAF$  las siguientes expresiones de sus áreas:

$$[OCD] = \frac{1}{2} \cdot R \cdot CD \cdot \text{sen}(\angle OCD) = \frac{1}{2} \cdot R \cdot b \cdot \cos C \cdot \text{sen}(90 - A) = \frac{1}{2} \cdot R \cdot b \cdot \cos C \cdot \cos A$$

$$[OAF] = \frac{1}{2} \cdot R \cdot AF \cdot \text{sen}(\angle OAF) = \frac{1}{2} \cdot R \cdot b \cdot \cos A \cdot \text{sen}(90 - C) = \frac{1}{2} \cdot R \cdot b \cdot \cos A \cdot \cos C.$$

Y análogamente para los otros dos pares.