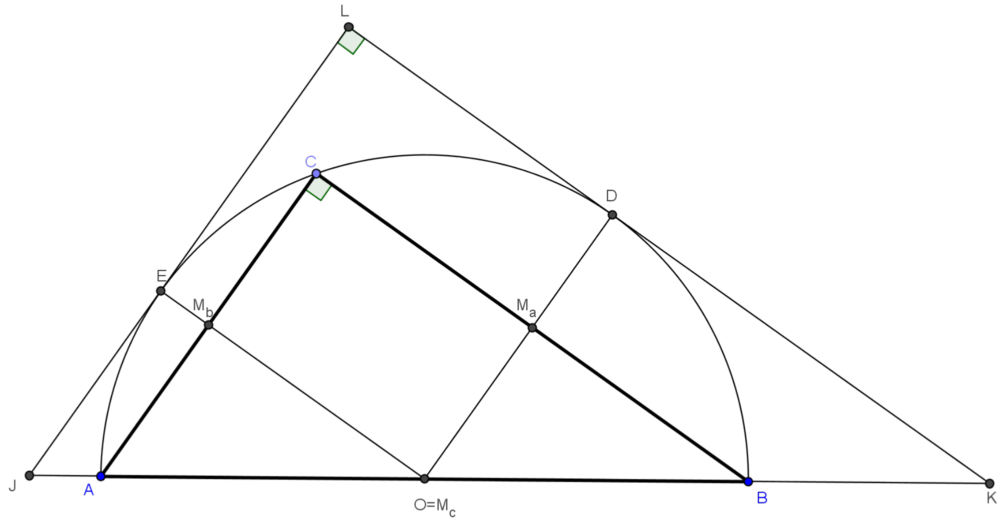
Solución al Problema 729
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 15 al 28 de febrero de 2015

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Febrero 17, 2015

Problema 729. *Komal (2015): Enero. (Basado sobre una idea de I. Légrádi, Sopron).*
C.1.271. Consideremos el círculo circunscrito a un triángulo rectángulo. Dibujemos el semicírculo conteniendo al triángulo, y tracemos las tangentes paralelas a los catetos. Tales paralelas junto a la recta que contiene a la hipotenusa, construyen un triángulo rectángulo semejante al original. Hallar los ángulos del triángulo si el área del mayor es 6 veces el área del menor.

Solución 729. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas y siendo $O \equiv M_c$ tenemos que la recta M_cM_a tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_cM_a \equiv x - y + z = 0$$

y la recta M_cM_b tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_cM_b \equiv x - y - z = 0$$

la circunferencia circunscrita tiene ecuación

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

y siendo el triángulo rectángulo es $c^2 = a^2 + b^2$, por tanto los puntos D y E intersección de las rectas M_cM_a y M_cM_b con la circunferencia circunscrita son

$$D(b - c : b : c), \qquad E(a : a - c : c)$$

por tanto las tangentes paralelas a los catetos tienen ecuaciones

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ b-c & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad DBC_\infty \equiv (c+b)x + (c-b)y + (c-b)z = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & a-c & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad ECA_\infty \equiv (c-a)x + (c+a)y + (c-a)z = 0$$

Ahora las coordenadas absolutas de los vértices J, K y L del triángulo mayor son

$$J\left(\frac{a+c}{2a}, \frac{a-c}{2a}, 0\right), \quad K\left(\frac{b-c}{2b}, \frac{b+c}{2b}, 0\right), \quad L\left(\frac{b-c}{2b}, \frac{a-c}{2a}, \frac{c(a+b)}{2ab}\right)$$

si el área del mayor es 6 veces el área del menor, tenemos que

$$\begin{vmatrix} \frac{a+c}{2a} & \frac{a-c}{2a} & 0 \\ \frac{b-c}{2b} & \frac{b+c}{2b} & 0 \\ \frac{b-c}{2b} & \frac{a-c}{2a} & \frac{c(a+b)}{2ab} \end{vmatrix} = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2(a+b)^2}{a^2b^2} = 24$$

extrayendo la raíz

$$\frac{c(a+b)}{ab} = 2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{b} + \frac{c}{a} = 2\sqrt{6}$$

pero $\cos A = \frac{b}{c}$ y $\sin A = \frac{a}{c}$, entonces

$$\frac{\sin A + \cos A}{\sin 2A} = \sqrt{6}$$

que tiene como solución $\angle A = 15°$ (o el complementario $\angle A = 75°$).