

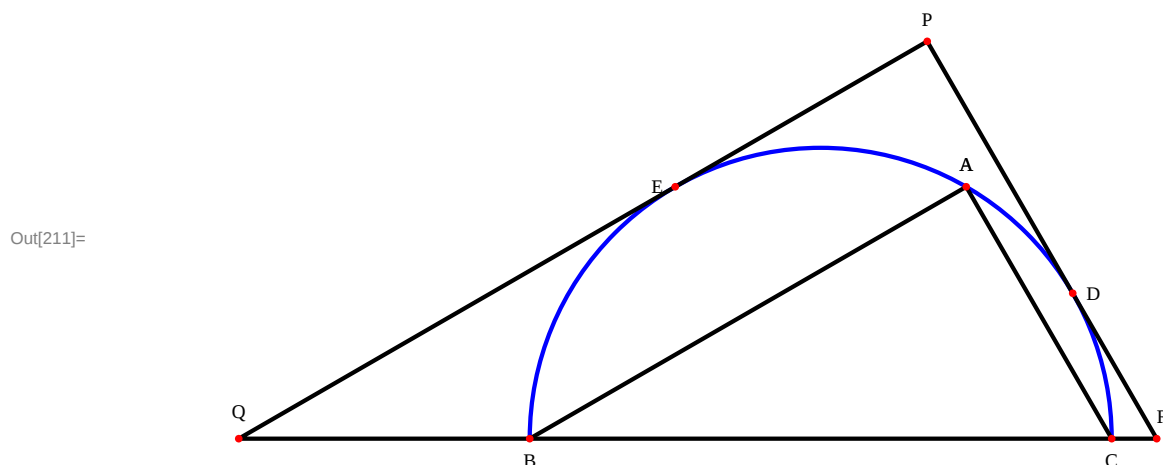
■ Enunciado

Consideremos el círculo circunscrito a un triángulo rectángulo. Dibujemos el semicírculo conteniendo al triángulo, y tracemos las tangentes paralelas a los catetos. Tales paralelas junto a la recta que contiene a la hipotenusa, construyen un triángulo rectángulo semejante al original. Hallar los ángulos del triángulo si el área del mayor es 6 veces el área del menor.

Komal (2015): Enero. (Basado sobre una idea de I. Légrádi, Sopron)

■ Solución

En el siguiente dibujo el triángulo ABC está inscrito al círculo de centro (0,0) y radio 1. Sus vértices tienen coordenadas A ($\cos 2\alpha, \sin 2\alpha$), B (-1,0) y C (1,0).



Vamos a determinar las coordenadas del punto P intersección de las tangentes del problema. Los puntos de tangencia son los puntos medios de los arcos AB y AC. Sus coordenadas son D ($\cos \alpha, \sin \alpha$) y E ($-\sin \alpha, \cos \alpha$).

Así pues las ecuaciones de las rectas tangentes por D y E son, respectivamente,

$$\cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y - 1 = 0$$

que se cortan en $P(\cos \alpha - \sin \alpha, \cos \alpha + \sin \alpha)$.

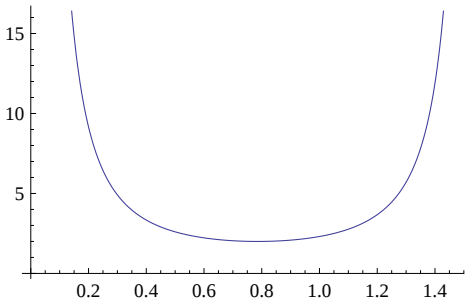
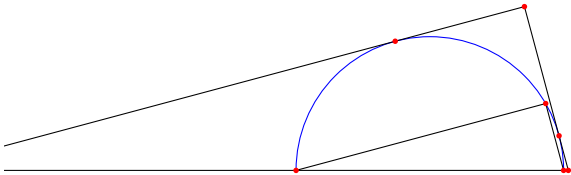
Si las áreas de los triángulos ABC y PQR están en relación $1:k^2$, sus alturas (las ordenadas de los puntos A y P) están en relación $1:k$. Se cumple que $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos 2\alpha} = k$.

Elevando al cuadrado y reordenando términos la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{\cos 2\alpha + 1}{\cos^2 2\alpha} = k^2 \quad \text{o bien} \quad k^2 \sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha - 1 = 0.$$

En el problema $k = \sqrt{6}$ y dicha ecuación tiene como solución positiva $2\alpha = 30^\circ$. Esto significa que los ángulos agudos del triángulo ABC miden 15° y 75° .

Out[224]=



En el anterior dibujo vemos el triángulo del problema y una gráfica de la función $f(\alpha) = \frac{\cos 2\alpha + 1}{\cos^2 2\alpha}$. Su valor mínimo se obtiene para $\alpha = 45^\circ$. En este caso $k = \sqrt{2}$ (y la razón entre áreas 1:2).