Problema 729.-

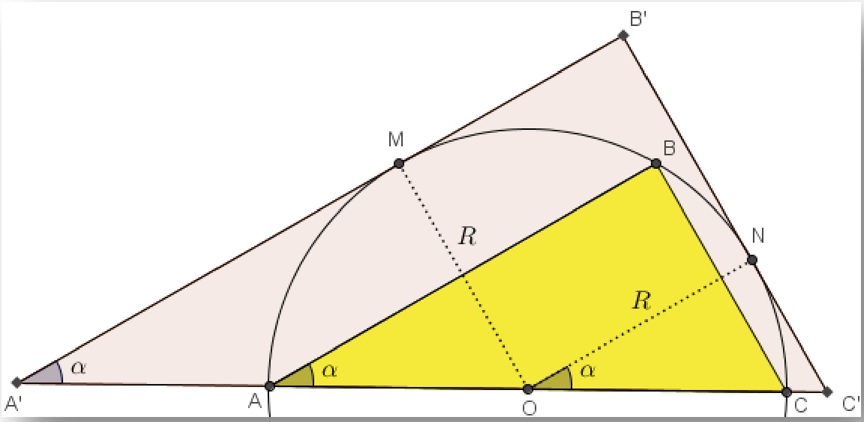
Consideremos el círculo circunscrito a un triángulo rectángulo. Dibujemos el semicírculo conteniendo al triángulo, y tracemos las tangentes paralelas a los catetos. Tales paralelas junto a la recta que contiene a la hipotenusa, construyen un triángulo rectángulo semejante al original.

Hallar los ángulos del triángulo si el área del mayor es 6 veces el área del menor.

Komal (2015): Enero. (Basado sobre una idea de I. Légrádi, Sopron)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Sean M y N los puntos de tangencia de los lados paralelos a los catetos AB y BC. Veamos que en el triángulo A'B'C', semejante al ABC, podemos determinar la hipotenusa A'C'.



En concreto,

si $\alpha = \measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$

$$\alpha = \measuredangle NOC' \rightarrow$$

$$A'O = \frac{R}{sin\alpha}; OC' = \frac{R}{cos\alpha}$$

Por tanto, $A'C' = A'O + OC' = \frac{R}{sin\alpha} + \frac{R}{cos\alpha}$

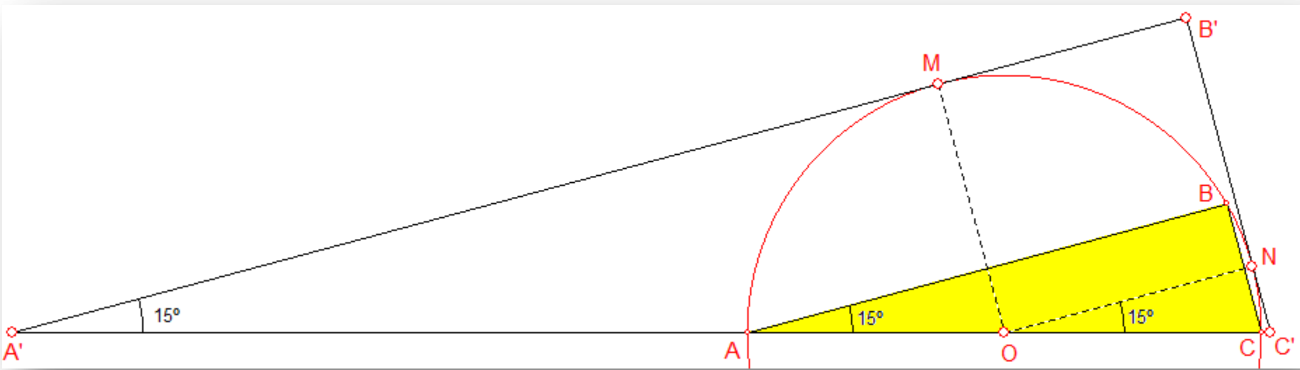
Si k es la razón de semejanza entre ambos triángulos,

$$k = \sqrt{6} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{\frac{R}{sin\alpha} + \frac{R}{cos\alpha}}{2R} = \frac{sin\alpha + cos\alpha}{2sin\alpha\ cos\alpha} \rightarrow \sin\alpha + \cos\alpha = 2\sqrt{6}\sin\alpha\cos\alpha \quad (I)$$

En definitiva, $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{6}\sin 2\alpha \ \ (I)$

Elevando al cuadrado (I), $1 + \sin 2\alpha = 6\ sin^2\ 2\alpha \rightarrow 6\ sin^2\ 2\alpha - \sin 2\alpha - 1 = 0$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos que: $\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$ ó $\frac{5\pi}{12}$.



De este modo, para que el área del triángulo mayor sea 6 veces el área del menor, los ángulos agudos de ambos triángulos deberán ser de 15º y 75º.